理學碩士 學位論文

직렬-병렬 시스템의 중복 설계 문제에 관한 연구

A Study on the Redundancy Optimization Problems in Series-Parallel System

指導敎授 金 宰 煥

2001年 2月

韓國海洋大學校 大學院

應 用 數 學 科

兪 東 勳

本 論文을 兪東勳의 理學碩士 學位論文으로 認准함

主審 : 理學博士 琴 尙 昊

委員 : 工學博士 金 宰 煥

委員 : 理學博士 裵 在 國

2001年 2月

韓國海洋大學校 大學院

應 用 數 學 科

兪 東 勳

목　　　차

Abstract ii

Ⅰ. 서　론 1

1.1 기 호 4

1.2 연구배경 및 목적 5

1.3 연구범위 7

Ⅱ. 0/1 변수 변환을 이용한 해법 8

2.1 직렬 시스템에 대한 0/1 변수 변환 8

2.2 직렬-병렬 구조 시스템에 대한 0/1 변수 변환 10

2.3 예 제 12

Ⅲ. 전산 실험 결과 19

Ⅳ. 결　론 22

부　　록 23

참고문헌 27

ABSTRACT

This paper is concerned with finding the global optimal solutions for the redundancy optimization problems in series-parallel systems. This study transforms the difficult problem, which is classifed as a nonlinear integer problem, into a 0/1 IP(Integer Programming) by using binary integer variables. And the global optimal solution to this problem can be easily obtained by applying GAMS (General Algebraic Modeling System) to the transformed 0/1 IP. From computational results, we notice that GA(Genetic Algorithm) to this problem, which is known as a best algorithm until now, is very poor in many cases.

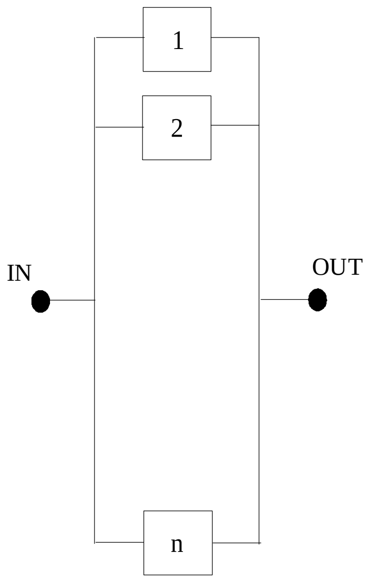
Ⅰ. 서 론

본 논문에서 다루고자 하는 중복 설계 문제는 선박, 비행기, 통신시스템 등의 신뢰도를 높이기 위해 비용, 무게 등을 고려한 다양한 제약 하에서 하부시스템의 중복 설계를 최적화 하는 것이다. 특히 이 문제는 만족스러운 서비스 제공, 경제적 효율성뿐만 아니라 인간의 생명, 안전과도 밀접한 관계가 있을 만큼 중요한 문제이다.

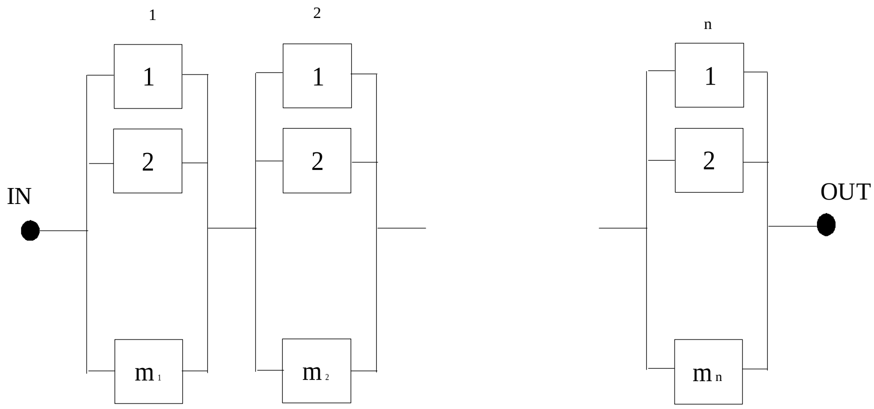
중복 설계 문제는 크게 다음과 같은 5가지의 구조로 분류된다(Tillman[1]).

1) 직렬 시스템 (Series System, <그림 1>)
2) 병렬 시스템 (Parallel System, <그림 2>)
3) 직렬-병렬 시스템 (Series-Parallel System, <그림 3>)
4) 병렬-직렬 시스템 (Parallel-Series System, <그림 4>)
5) 콤플렉스 시스템 (nonseries, nonparallel, <그림 5>)

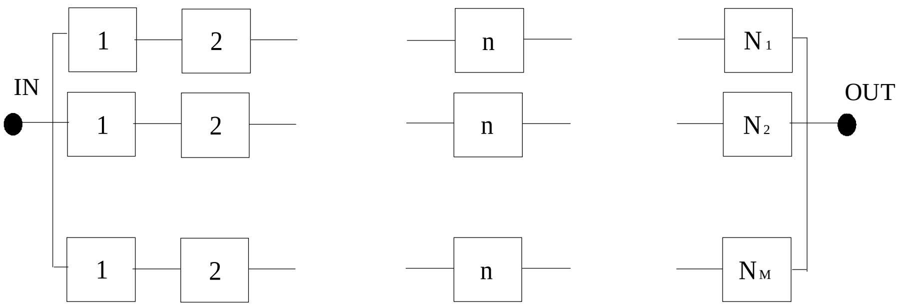
<그림 1> 직렬 시스템



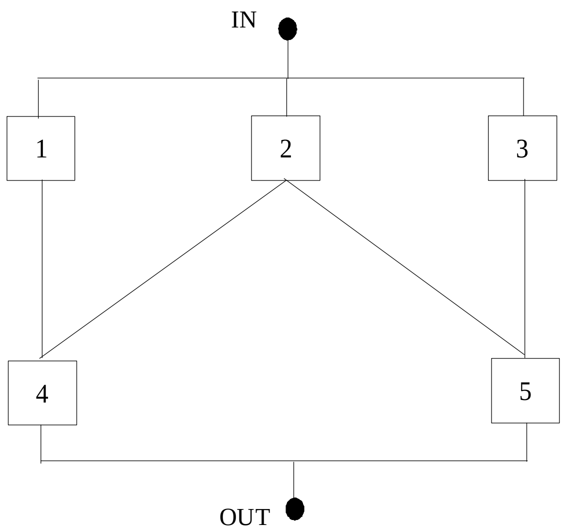
<그림 2> **병렬 시스템**



<그림 3> **직렬-병렬 시스템**



<그림 4> 병렬-직렬 시스템



<그림 5> 콤플렉스 시스템

본 논문에서는 위의 5가지 모형 중 직렬-병렬 시스템에 대한 중복 설계 문제를 다루고자 하며, 모형 설명을 위한 기호는 다음과 같다.

1.1 기 호

R_s : 전체 시스템 신뢰도

R_s^* : 전체 시스템 신뢰도의 최적해

q_i : i번째 부품 비신뢰도

q_{ij} : i번째 하부시스템의 j번째 대안 부품의 비신뢰도

x_i : i번째 하부시스템의 부품의 갯수

a_{ij} : i번째 하부시스템에 소요되는 j번째 자원의 양

d_j : j번째 자원의 최대 사용 가능량

n : 하부시스템의 갯수

m : 제약식의 갯수

m_i : i번째 하부시스템의 대안 부품의 갯수

w_{ijk} : k번째 제약식의 i번째 하부시스템에 소요되는 j번째 자원의 양

W_k : k번째 제약식 자원의 최대 사용 가능량

x_{ij} : i번째 하부시스템의 j번째 대안 부품의 중복 개수

U : 부품 중복 개수의 상한치

$y_{i,k_1,k_2,\cdots,k_{m_i}}$: i번째 하부시스템의 0/1 정수 변수

1.2 연구배경 및 목적

본 논문에서 다루고자 하는 직렬-병렬 시스템에 대한 이해를 돕기 위해, 기본적인 구조인 직렬 시스템에 대해 먼저 살펴 보고자 한다.

<그림 1>의 직렬 시스템에 대한 중복 설계 문제의 모형은 다음과 같다.

$$\text{Maximize} \quad R_s = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i^{x_i})$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le d_j, \quad j = 1, \cdots, m;$$

$$x_i \ge 1; \quad x_i : \text{integers}$$

위의 모형은 대해 Bellman[7], Bellman/Dreyfus[8,9] 등이 처음으로 제시하였으며, 동적 프로그램(dynamic programming)을 사용하여 최적해를 구하였다. Ghare/Taylor[2]는 0/1 변수 변환을 이용하여 위의 모형을 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제로 변환한 다음, 분지 한계법(branch-and-bound method)을 이용하여 최적해를 구하였다. 또한, Nakagawa/Nakashima[3]는 효율적인 분지 한계법을 개발하여 Ghare/Taylor[2]의 방법과의 성능을 비교 하였고, Bulfin[6]은 보다 큰 규모의 문제에 대해 0/1 정수계획 문제로 변환한 후, 분지 한계법을 이용하여 최적해를 구하였다.

본 논문에서 다루고자 하는 직렬-병렬 시스템의 중복 설계 문제는 <그림 3>에서 처럼 직렬 시스템의 구조에 병렬 시스템을 복합시킨 형태이며, Fyffe[4]는 다음과 같은 직렬-병렬 시스템의 모형을 제시하였고, 동적 프로그램(dynamic programming)을 이용하여 최적해를 구하였다.

Maximize $R_s = \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m_i} (1 - q_{ij})^{x_{ij}} \right]$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_i} w_{ijk} x_{ij} \le W_k, \qquad \forall k = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m_i} x_{ij} \ge 1$$

$$0 \le x_{ij} \le U, \quad \text{integers}$$

또한 Nakagawa/Miyazaki[5]**는** surrogate **제약식을 이용하여 최적해를 개선시켰다**.

이에 반해, Smith[10]**는 다음** <**그림** 6>**에서 처럼** Fyffe[4]**의 모형의** stage 7, 8**에서 서로 다른 하부시스템** 1, 3**을 중복 설계하여 신뢰도를 증가시키는 다음과 같은 모형을 제시 하였고**, **발견적 해법인** GA(Genetic Algorithm)**을 이용하여 최적해를 구하였다**.

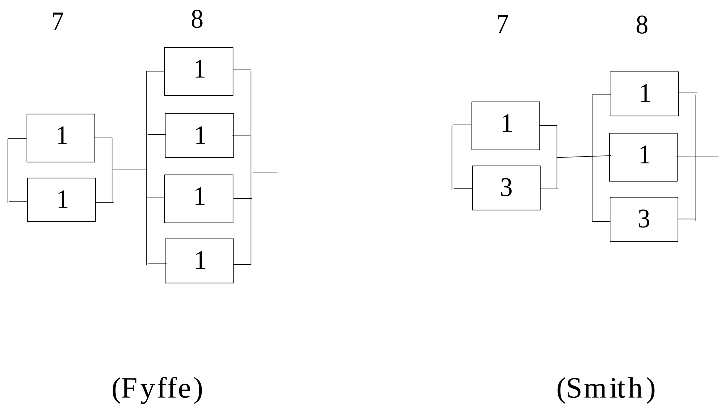
Maximize $R_s = \prod_{i=1}^{n} \left[\left(1 - \prod_{j=1}^{m_i} q_{ij}\right)^{x_{ij}} \right]$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_i} w_{ijk} x_{ij} \le W_k, \qquad \forall k = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m_i} x_{ij} \ge 1$$

$$0 \le x_{ij} \le U, \quad \text{integers}$$



<그림 6> Smith의 하부시스템의 중복 설계

그러나, Smith[10]가 GA을 이용하여 구한 해는 global 최적해가 아니므로, 본 논문에서는 이 문제에 대해 0/1 변수 변환을 이용하여 global 최적해를 구하고자 한다.

1.3 연구 범위

본 논문에서는 직렬-병렬 시스템의 중복설계 문제에 대한 global 최적해를 구하기 위해, 먼저 0/1 변수 변환을 이용하여 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제로 변환한 다음 GAMS(General Algebraic Modeling System)을 이용하여 최적해를 구하였다. 2장에서는 널리 알려진 Fyffe[4]의 33개의 문제에 대해 global 최적해를 구하여 Nakagawa/ Miyazaki[5], Smith[10] 등의 해와 비교 분석 하였다.

Ⅱ. 0/1 변수 변환을 이용한 해법

본 장에서는 Smith[10]가 제시한 다루기 힘든 비선형 정수계획 문제인 직렬-병렬 시스템의 중복 설계 문제를 풀기 위해, 이와 유사한 직렬 시스템의 0/1 변수 변환에 의한 해법을 살펴보고, 이에 기초를 둔 직렬-병렬 시스템에 대한 0/1 변수 변환을 이용한 해법을 제시하고자 한다.

2.1 직렬 시스템에 대한 0/1 변수 변환

Ghare/Taylor[2]는 서론에서 언급한 다음 직렬 시스템 모형 (P_0)에서

(P_0)

$$\text{Maximize} \quad R_s = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i^{x_i})$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le d_j, \qquad j = 1, \cdots, m;$$

$$x_i \ge 1; \qquad x_i : \text{integers}$$

$C_{ik} = \log(1 - q_i^{k+1}) - \log(1 - q_i^{k})$, $b_j = d_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ 로 치환하여 다음과 같은 0/1 정수계획 문제로 변환시켰다.

(P_0')

Maximize $\quad R_s' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k=\infty} c_{ik} x_{ik}$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij} x_{ik} \le b_j, \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_{ik} = 0 \text{ or } 1$$

여기서, $x_{ik} = 0$ **은** $x_{il} = 0 \ (l > k)$**을 의미한다.**

[Lemma] (Ghare/Taylor)

> **모형** (P_0)**와** (P_0')**의 가능해**(feasible solution)**는 일대일 대응 관계에 있다.**

(증명)

$X = \{x_{ik}\}$**는** (P_0')**의 가능해라 하고,** k_i **를** $x_{ik} = 1$ **에서 가장 큰** index **라고 하면,** (P_0')**의 가능해** X **는**

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=\infty} a_{ij} x_{ik} \le b_j,$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_{ij} k_i \le d_j - \sum_{i=1}^{i=m} a_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_{ij} (k_i + 1) \le d_j .$$

그러므로, $X = \{x_i \mid x_i = k_i + 1\}$**는** (P_0)**의 가능해이다.**

또한, (P_0')의 목적함수 R_s'는

$$R_s' = \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=\infty} c_{ik}\, x_{ik}$$
$$= \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=k_i}\{\log(1-p_i^{k+1}) - \log(1-p_i)\}$$
$$= \log R_s - \sum_{i=1}^{i=m}\log(1-p_i) \quad \blacksquare$$

결론적으로, R_s를 최대화 시키는 것은 R_s'를 최대화 시키는 것과 동일하다.

Ghare/Taylor[2]는 위와 같이 0/1 변수 변환을 이용하여 0/1 정수계획 문제로 변환한 다음, 분지 한계법에 의해 최적해를 구하였다.

2.2 직렬-병렬구조 시스템에 대한 0/1 변수 변환

서론에서 언급한 직렬-병렬 시스템의 다음과 같은 모형은 목적함수 R_s가

(P_1)

Maximize $\quad R_s = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \prod_{j=1}^{m_i} q_{ij}^{\,x_{ij}}\right)$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} w_{ijk}\cdot x_{ij} \le W_k, \qquad \forall\, k = 1, 2, \cdots, m$$
$$\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \ge 1$$
$$0 \le x_{ij} \le U, \quad \text{integers}$$

직렬 시스템에서와는 달리 복잡한 형태이므로, 직렬 시스템에서 언급한 Ghare/Taylor[2]의 0/1 변수 변환은 가능하지 않다. 따라서, 비선형 정수계획 문제인

(P_1)을 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제로 변환하기 위해 Ghare/Taylor[2]에서와는 달리, $0 \le x_{ij} \le U$ 의 모든 경우의 정수해를 0/1 변수를 이용하여 나열하였고, 변환한 모형은 다음과 같다.

$$\text{Maximize} \quad R_s' = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k_1=0}^{U} \sum_{k_2=0}^{U} \cdots \sum_{k_{m_i}=0}^{U} \left(r_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} \times y_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} \right) \right]$$

$$,(k_1, k_2, \cdots, k_{m_i}) \neq 0$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k_1=0}^{U} \sum_{k_2=0}^{U} \cdots \sum_{k_{m_i}=0}^{U} \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} k_j w_{ijk} \right) \times y_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} \right) \right] \le W_k$$

$$\forall k = 1, 2, \cdots, m \qquad ,(k_1, k_2, \cdots, k_{m_i}) \neq 0$$

$$\sum_{k_1=0}^{U} \sum_{k_2=0}^{U} \cdots \sum_{k_{m_i}=0}^{U} y_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} = 1$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n \qquad ,(k_1, k_2, \cdots, k_{m_i}) \neq 0$$

$$y_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} = 0, 1 \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\forall k_1 = 0, 1, 2, \cdots, U$$

$$\forall k_2 = 0, 1, 2, \cdots, U$$

$$\forall k_{m_i} = 0, 1, 2, \cdots, U$$

여기서, $r_{i,k_1,k_2,\ldots,k_{m_i}} = \log \left(1 - q_{i_1}^{k_1} q_{i_2}^{k_2} \cdots q_{i_{m_i}}^{k_{m_i}} \right)$ 이다.

위의 문제는 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제이므로, GAMS를 이용하여 최적해를 구할 수 있다.

2.3 예 제

본 절에서는 2.2 절에서 언급한 모형을 Fyffe[4]의 예제를 통해 구체적으로 제시하고자 한다.

Fyffe[4]의 예제

$$\text{Maximize} \quad R_s = \prod_{i=1}^{14} \left(1 - \prod_{j=1}^{m_i} q_{ij}^{\ x_{ij}}\right)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{14} \sum_{j=1}^{m_i} w_{ijk} \cdot x_{ij} \le W_k, \qquad \forall k = 1, 2$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \ge 1$$

$$0 \le x_{ij} \le 5, \quad \text{integers}$$

여기서, n=14, W_1=130, W_2=191 이며, m_i 계수는 <표 2.1>에, q_{ij} 및 w_{ijk} 의 계수는 <표 2.2>에 각각 주어져 있다.

<표 2.1> m_i 의 계수

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m_i	4	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	4

<표 2.2> q_{ij} , w_{ijk} 의 계수

i	j (Design Alternative)											
	1			2			3			4		
	q_{ij}	w_{ij1}	w_{ij2}	q_{ij}	w_{ij1}	w_{ij2}	q_{ij}	w_{ij1}	w_{ij2}	q_{ij}	w_{ij1}	w_{ij2}
1	0.10	1	3	0.07	1	4	0.09	2	2	0.05	2	5
2	0.05	2	8	0.06	1	10	0.07	1	9	*	*	*
3	0.15	2	7	0.10	3	5	0.13	1	6	0.08	4	4
4	0.17	3	5	0.13	4	6	0.15	5	4	*	*	*
5	0.06	2	4	0.07	2	3	0.05	3	5	*	*	*
6	0.01	3	5	0.02	3	4	0.03	2	5	0.96	2	4
7	0.09	4	7	0.08	4	8	0.06	5	9	*	*	*
8	0.19	3	4	0.10	5	7	0.09	6	6	*	*	*
9	0.03	2	8	0.01	3	9	0.04	4	7	0.91	3	8
10	0.17	4	6	0.15	4	5	0.10	5	6	*	*	*
11	0.06	3	5	0.05	4	6	0.04	5	6	*	*	*
12	0.21	2	4	0.18	3	5	0.15	4	6	0.90	5	7
13	0.02	2	5	0.01	3	5	0.03	2	6	*	*	*
14	0.10	4	6	0.08	4	7	0.05	5	6	0.99	6	9

위의 비선형 정수계획 문제는 2.2절에서 언급한 0/1 변수 변환의 모형에 대입하면, 다음과 같은 0/1 정수계획 문제로 표현된다.

$$\text{Maximize} \quad R_s' = -0.10536 \times y_{1,\,1,0,0,0} + \cdots + 0 \times y_{14,\,5,5,5,5}$$

subject to

$$1 \cdot y_{1,\,1,0,0,0} + \cdots + 95 \cdot y_{14,\,5,5,5,5} \le 130$$

$$3 \cdot y_{1,\,1,0,0,0} + \cdots + 140 \cdot y_{14,\,5,5,5,5} \le 191$$

$$y_{1,\ 1,0,0,0} + \cdots + y_{1,\ 5,5,5,5} = 1$$

$$y_{2,\ 1,0,0,0} + \cdots + y_{2,\ 5,5,5,5} = 1$$

$$\vdots$$

$$y_{14,\ 1,0,0,0} + \cdots + y_{14,\ 5,5,5,5} = 1$$

$$y_{1,\ 1,0,0,0}\ ,\ \cdots\ ,\ y_{14,\ 5,5,5,5} = 0\ ,\ 1$$

위의 문제는 0/1 **정수계획 문제이므로**, GAMS**를 이용하여** global **최적해를 구하였고**, **구체적인** GAMS**의 프로그램** list**는 다음과 같다**.

<GAMS**의 프로그램** list>

```
*option lp=minos5, limrow=0, limcol=0, solprint=off;
option limrow=0, limcol=0;
option solprint=off;
*option mip=zoom;
option optcr=0;
parameter omega;
omega = 191 ;
sets   i / 1*14/
       j / 1*6/
       k / 1*6/
       l / 1*6/
       m / 1*6/
       s / 1*4/  ;
parameter i3(i) /
 2     1
 4     1
```

```
 5      1
 7      1
 8      1
10      1
11      1
13      1 /;
parameter i4(i) /
1       1
3       1
6       1
9       1
12      1
14      1 /;
table q(i,s)
        1       2       3       4
1       0.1     0.07    0.09    0.05
2       0.05    0.06    0.07
3       0.15    0.1     0.13    0.08
4       0.17    0.13    0.15
5       0.06    0.07    0.05
6       0.01    0.02    0.03    0.04
7       0.09    0.08    0.06
8       0.19    0.1     0.09
9       0.03    0.01    0.04    0.09
10      0.17    0.15    0.1
11      0.06    0.05    0.04
12      0.21    0.18    0.15    0.1
13      0.02    0.01    0.03
14      0.1     0.08    0.05    0.01 ;
table c(i,s)
```

	1	2	3	4
1	1	1	2	2
2	2	1	1	
3	2	3	1	4
4	3	4	5	
5	2	2	3	
6	3	3	2	2
7	4	4	5	
8	3	5	6	
9	2	3	4	3
10	4	4	5	
11	3	4	5	
12	2	3	4	5
13	2	3	2	
14	4	4	5	6 ;

table w(i,s)

	1	2	3	4
1	3	4	2	5
2	8	10	9	
3	7	5	6	4
4	5	6	4	
5	4	3	5	
6	5	4	5	4
7	7	8	9	
8	4	7	6	
9	8	9	7	8
10	6	5	6	
11	5	6	6	
12	4	5	6	7
13	5	5	6	

```
14      6      7      6      9 ;
parameter r4(i,j,k,l,m), r3(i,j,k,l);
parameters jexp, kexp, lexp, mexp;
loop((j,k,l) $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1),
        jexp = ord(j)-1;
        kexp = ord(k)-1;
        lexp = ord(l)-1;
        r3(i,j,k,l) $ (i3(i) eq 1) = log(1- q(i,'1')**jexp * q(i,'2')**kexp
                                    * q(i,'3')**lexp) ;
);
loop((j,k,l,m) $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1 or ord(m) gt 1),
        jexp = ord(j)-1;
        kexp = ord(k)-1;
        lexp = ord(l)-1;
        mexp = ord(m)-1;
        r4(i,j,k,l,m) $ (i4(i) eq 1) = log(1- q(i,'1')**jexp * q(i,'2')**
                kexp * q(i,'3')**lexp * q(i,'4')**mexp) ;
);
*display r3, r4;
binary variables x3(i,j,k,l), x4(i,j,k,l,m);
variable rs;
equations obj, eq1, eq2, eq3, eq4 ;
obj .. rs =e= sum(i $ i3(i), sum ((j,k,l) $
        (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1),r3(i,j,k,l)*x3(i,j,k,l)))
+ sum(i $ i4(i), sum ((j,k,l,m)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1 or ord(m) gt 1),
        r4(i,j,k,l,m)*x4(i,j,k,l,m))) ;
eq1 .. sum(i $ i3(i), sum( (j,k,l)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1),
(c(i,'1')*(ord(j)-1)+c(i,'2')*(ord(k)-1)+
```

```
        c(i,'3')*(ord(l)-1))*x3(i,j,k,l)) )+sum(i $ i4(i), sum( (j,k,l,m)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1 or ord(m) gt 1),
(c(i,'1')*(ord(j)-1)+c(i,'2')*(ord(k)-1)+
        c(i,'3')*(ord(l)-1)+c(i,'4')*(ord(m)-1))*x4(i,j,k,l,m)) ) =l= 130 ;
eq2 .. sum(i $ i3(i), sum( (j,k,l)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1),
(w(i,'1')*(ord(j)-1)+w(i,'2')*(ord(k)-1)+
        w(i,'3')*(ord(l)-1))*x3(i,j,k,l)) ) +
        sum(i $ i4(i), sum( (j,k,l,m)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1 or ord(m) gt 1),
(w(i,'1')*(ord(j)-1)+w(i,'2')*(ord(k)-1)+
        w(i,'3')*(ord(l)-1)+w(i,'4')*(ord(m)-1))*x4(i,j,k,l,m)) ) =l= omega ;
eq3(i) $ i3(i) .. sum((j,k,l)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1),
        x3(i,j,k,l)) =e= 1 ;
eq4(i) $ i4(i) .. sum((j,k,l,m)
        $ (ord(j) gt 1 or ord(k) gt 1 or ord(l) gt 1 or ord(m) gt 1),
        x4(i,j,k,l,m)) =e= 1 ;
model reliable /all/;
solve reliable using mip maximizing rs ;
display x3.l, x4.l, rs.l;
```

이 GAMS **프로그램은** IBM RS/6000P **기종으로 수행되었으며**, **수행시간은** 0.32**초이다**. **이 문제에 대한** 0/1 **변수의 총 개수는** 9490**개이며**, **최적해** $R_s^* =$ 0.955**이다**. **구체적인 출력결과는** <**부록**>**에 수록되어 있다**.

Ⅲ. 전산 실험 결과

Smith[10]가 분석한 33개의 문제에 대해 본 연구에서 GAMS를 이용하여 구한 global 최적해는 <표 3.1>과 <표 3.2>에 나타나 있다.

<표 3.1> GAMS의 최적해와 비교

	N&M			GA	GAMS
	최적해 R_s^*	Cost	Weight	최적해 R_s^*	최적해 R_s^*
191	.9864	130	191	.9867 *	.9868
190	.9854	132	189	.9857 *	.9864
189	.9850	131	188	.9856 *	.9859
188	.9847	129	188	.9850 *	.9854
187	.9840	133	186	.9844 *	.9847
186	.9831	129	186	.9836 *	.9841
185	.9829	129	185	.9831 *	.9835
184	.9822	126	184	.9823 *	.9829
183	.9815	130	182	.9819 *	.9823
182	.9815	130	182	.9811 *	.9815
181	.9800	128	181	.9802 *	.9810
180	.9796	126	180	.9797 *	.9803
179	.9792	127	179	.9791 *	.9795
178	.9772	123	177	.9783 *	.9784
177	.9772	123	177	.9772 *	.9776
176	.9764	125	176	.9764 *	.9767
175	.9744	121	174	.9753 *	.9757

* : GA가 global 최적해를 못 찾은 경우

<표 3.2> GAMS의 최적해와 비교

	N&M			GA	GAMS
	최적해 R_s^*	Cost	Weight	최적해 R_s^*	최적해 R_s^*
174	.9744	121	174	.9744 *	.9749
173	.9723	122	173	.9738	.9738
172	.9720	123	172	.9727 *	.9731
171	.9700	119	170	.9719	.9719
170	.9700	119	170	.9708	.9708
169	.9675	121	169	.9692 *	.9693
168	.9666	120	168	.9681	.9681
167	.9656	117	167	.9663 *	.9664
166	.9646	116	166	.9650	.9650
165	.9621	118	165	.9637	.9637
164	.9609	116	164	.9624	.9624
163	.9602	114	163	.9606	.9606
162	.9589	112	162	.9591 *	.9592
161	.9565	111	161	.9580	.9580
160	.9546	110	159	.9557	.9557
159	.9546	110	159	.9546	.9546

* : GA가 global 최적해를 못 찾은 경우

<표 3.1>의 17문제(175 191)에 대해서 N&M과 GA는 global 최적해를 한 번도 얻지 못했음을 알 수 있고, <표 3.2>의 16문제(159 174)에 대해서는 N&M과 GA는 각각 1번, 11번의 global 최적해를 구하는 것을 알 수 있었다.

위의 결과로부터 현재 가장 좋은 해를 찾아준다고 알려진 Smith[10]의 GA는 <표 3.1>에서 처럼 가능해의 영역이 점점 확대됨에 따라 global 최적해를 한 번도 찾지 못함을 본 연구를 통해 알 수 있었다.

Ⅳ. 결　론

본 논문에서는 Smith[10]가 제시한 다루기 힘든 비선형 정수계획 문제인 직렬-병렬 시스템의 중복 설계 문제의 global 최적해를 구하기 위해, 먼저 0/1 변수 변환을 이용하여 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제로 변환한 다음, GAMS (Genetic Algebraic Modeling System)을 이용하여 최적해를 구하였다.

2.3절의 예제에서 총 9490개의 0/1 변수가 사용된 문제를 IBM RS/6000P 기종에 의해 GAMS 프로그램을 수행한 결과, 0.32초가 소요됨을 알 수 있었다. 또한, Fyffe[4]의 33개 문제에 대해 전산 실험한 결과, 현재까지 가장 좋은해를 구할 수 있다고 알려진 Smith[10]의 GA는 가능해의 영역이 점점 확대됨에 따라 global 최적해를 한 번도 찾지 못함을 본 연구를 통해 알 수 있었다.

<부 록> GAMS 프로그램의 출력 결과

```
COMPILATION TIME  =  0.090 SECONDS    VERID   AIX-00-061
GAMS 2.25.061   AIX RS/6000P
General Algebraic Modeling System
Model Statistics   SOLVE RELIABLE USING MIP FROM LINE 150

MODEL STATISTICS
BLOCKS OF EQUATIONS       5   SINGLE EQUATIONS       17
BLOCKS OF VARIABLES       3   SINGLE VARIABLES     9491
NON ZERO ELEMENTS     36147   DISCRETE VARIABLES   9490

GENERATION TIME   =   6.440  SECONDS
EXECUTION TIME    =   7.760  SECONDS   VERID AIX-00-061

STEP SUMMARY:      0.070 STARTUP
                   0.090 COMPILATION
                   7.760 EXECUTION
                   0.100 CLOSEDOWN
                   8.020 TOTAL SECONDS
GAMS  2.25.061 AIX RS/6000P
General Algebraic Modeling System
Solution Report   SOLVE RELIABLE USING MIP FROM LINE 150

              S O L V E   S U M M A R Y
  MODEL   RELIABLE          OBJECTIVE  RS
  TYPE    MIP               DIRECTION  MAXIMIZE
  SOLVER  OSL               FROM LINE  150
**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
```

```
**** MODEL STATUS        1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              -0.0465
RESOURCE USAGE, LIMIT           5.260      1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT        188          1000
OSL Release 2, GAMS Link level 3  --- AIX RS/6000  1.3.045-017
**** REPORT SUMMARY :       0        NONOPT
                            0     INFEASIBLE
                            0    UNBOUNDED

GAMS 2.25.061  AIX RS/6000P
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
E x e c u t i o n
----     152  VARIABLE   X3.L

INDEX 1 = 2
                 1
3.1            1.000
INDEX 1 = 4
                 4
1.1            1.000
INDEX 1 = 5
                 1
1.3            1.000
INDEX 1 = 7
                 1
3.1            1.000
INDEX 1 = 8
                 1
```

```
4.1            1.000
INDEX 1 = 10
                  1
1.4            1.000
INDEX 1 = 11
                  1
3.1            1.000
INDEX 1 = 13
                  1
1.3            1.000

GAMS 2.25.061   AIX RS/6000P
General Algebraic Modeling System
Execution

----     152  VARIABLE   X4.L
INDEX 1 = 1  INDEX 2 = 1
                  1
1.4            1.000
INDEX 1 = 3  INDEX 2 = 1
                  3
1.1            1.000
INDEX 1 = 6  INDEX 2 = 1
                  1
3.1            1.000
INDEX 1 = 9 INDEX 2 = 1
                  1
1.3            1.000
```

```
INDEX 1 = 12 INDEX 2 = 5

                 1
1.1           1.000
INDEX 1 = 14 INDEX 2 = 1
                 1
1.3           1.000
----      152 VARIABLE  RS.L        =         -0.046

EXECUTION TIME    =     0.320  SECONDS   VERID AIX-00-061

**** FILE SUMMARY
INPUT        /tmp-mnt/scratch/nikos/rel.gms
OUTPUT       /tmp_mnt/scratch/nikos/rel.lst
STEP SUMMARY:     0.210 STARTUP
                  0.000 COMPILATION
                  0.320 EXECUTION
                  0.000 CLOSEDOWN
                  0.530 TOTAL SECONDS
```

참 고 문 헌

[1] F.A Tillman, C.L.Hwang, & W.Kuo, "", IEEE Trans. on Rel. vol. R-26, No.3, 1977, PP 148-155.

[2] P.M. Ghare & R.E. Taylor, "Optimal Redundancy for Reliability in Series System", O.R vol. 17, 1969, pp 838-847.

[3] Nakagawa, Y. , Nakashima, K & Hattori, Y. , "Optimal reliability allocation by Branch and Bound techniques", IEEE Trans. on Rel. vol.27, 1978, pp 31-38.

[4] D.E. Fyffe, W.W. Hines, & N.K.Lee, "System Reliability Allocation and a Computational Algorithm", IEEE Trans. on Rel., vol. R-17, 1968, pp 64-69.

[5] Y. Nakagawa, & S. Miyazaki, "Surrogate constraint algorithm for reliability optimization problem with two constraints", IEEE Trans. on Rel., vol. R-30, 1981, pp 175-179.

[6] R.L. Bulfin, & C.Y. Liu, "Optimal Allocation of Redundant Components for Large Systems", IEEE. Trans. on Rel. , vol R-34, 1985, pp 241-247.

[7] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1957

[8] R. E. Bellman, E. Dreyfus, "Dynamic programming and reliability of multicomponent devices", Operations Research, vol 6, 1958, pp 200-206.

[9] R. E. Bellman, E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, 1962, Princeton Univ. Press.

[10] A. E. Smith, D.M. Tate, "Genetic optimization using a penalty

function", Proc. Genetic Algorithms, 1993, pp 499-505.

감사의 글

바다를 보며 꿈을 가지고 첫 발을 내디딘 대학생활...

인생에 있어 가장 중요하다면 중요한 이 시기에 저는 여러 좋은 분들을 만날 수 있었다는 것은 크다란 복이 아닌가 하는 생각을 해 봅니다.

10년이면 강산도 변한다는데 벌써 10년이란 세월이 지나갔습니다.

10년 생활동안 때론 기쁘고 때론 힘들었던 여러 순간들이 갑자기 주마등처럼 스쳐 지나갑니다.

그동안 여러 사람을 만나고 도움도 많이 받으면서 이렇게 석사과정을 마치게 된 것을 큰 기쁨으로 생각합니다.

학생신분에서 또 다른 사회로 진출하는 저로서 잊지 못할 추억을 많이 남긴 학교 생활에서 도움을 주신 여러분들을 모두 찾아뵙지 못하고 이렇게 감사의 글로서나마 전하게 되었습니다.

우선 응용수학과 일곱 분 교수님들께 머리 숙여 감사의 말씀을 전합니다.

특히 4년 동안 신경을 많이 써 주신 지도 교수님이신 김재환 교수님께 진심으로 감사의 말씀을 전합니다.

그리고 제 진로에 항상 관심과 격려를 주신 김장욱 교수님, 박춘일 교수님 감사 드립니다.

논문에 많은 도움을 주신 금상호 교수님, 홍정희 교수님, 김익성 교수님, 배재국 교수님께도 감사 드립니다.

또한 저희 학과 학우들에게도 감사의 말을 전합니다.

여러 가지로 신경을 많이 쓴 조교인 정지영 학우와 동기인 해연, 희숙, 후배 금철 모두 모두 고마운 마음을 가지고 있고 여동석씨, 응현이 모두에게 감사의 말을 전합니다.

끝으로 집에서 뒷바라지에 고생이 많으신 저희 부모님 정말 고맙습니다.

저의 인생에 큰 도움을 주시고 또 앞으로 이러한 도움에 실망시키지 않는 사람이 되도록 항상 최선을 다하는 모습을 보여 드리겠습니다.