

3차원 타원형 물체의 격자생성에 관한 연구

朴 命 圭* · 金 東 津**

A Study on Grid Generation for 3 - Dimensional Elliptic Body

Park Myung - Kyu, Kim Dong - Jin

Abstract

The generation of a body fitted coordinate system is an essential and important part of a general numerical method for computing the ship flow since a poor grid can upset computational program seriously. So there has been a great deal of interest in the development of numerical grid generation technique. A method of numerically generated coordinate system suitable for the flow around body was first introduced by Chen and Patel.

In this paper the same basic algorithm as that of Chen and Patel is used to generate the body - fitted coordinate system while the new method that control the spacing and orientation of coordinate is introduced to improve the calculation results.

1. 서 론

임의의 형상을 갖는 물체에 대한 격자 생성의 방법은 유한차분법(F. D. M)과 유한요소법(F.E.M)을 이용한 기법이 개발되고 있다.

실제 경우에 있어서 물체의 형상을 보통 간단히 2차원으로 나타낼 수 있는 것이 드물고 복잡한 형상을 하고 있다. 이러한 물체 주위의 유동 형상을 파악하기 위해서 복잡한 계산영역을 간단한 영역으로 변환시켜 계산하는 것이 필요하게 된다. 그러므로 물체의 형상을 공간에 고정된 기본적인 직교좌표계를 사용하여 표시하는 것보다 주어진 경계조건을 용이하게 활용할 수 있고 변환된 좌표계

* 한국해양대학교 선박공학과 교수

** 현대 선박 연구소

에서 계산 영역을 간단하게 나타낼 수 있는 해석적인 그리고 수치적인 좌표 변환이 바람직하다.

여기서는 수치 격자 생성의 방법으로서 같은 격자 간격을 가지면서 육면체 영역으로 계산영역을 변환시켜 주고 일반성과 융통성의 잇점을 갖는 물체에 따라 적합해지는 좌표 즉, 물체 적합 좌표계 (Body fitted coordinate)를 사용한다.

본 연구에서는 3차원 타원형 물체에 관한 물체 적합 좌표계를 생성시키는데 있어 계산의 효율성을 향상시키기 위하여 exponential scheme을 도입하였으며, 그 결과 해의 수렴성이 우수함을 알 수 있었다.

2. 지배방정식

1) 격자 생성 방정식(Coordinate generating system)

임의 영역에서의 유동의 수치해석을 위하여 Fig. 1과 같은 좌표계를 생각한다.

계산 영역 D의 주위는 임의의 표면 S와 중심면 C, 자유표면 W, 상류부분과 하류부분인 A와 B 그리고 바깥경계로 되어 있다.

A는 경계층이 얇은 곳에 위치해 있고, B는 후류영역에 까지 걸쳐 있다. 경계-사상을 하는 곡선좌표계의 기본적인 개념은 영역 D를 Fig. 2에 보인 바와 같이 직교좌표계 (x, y, z) or (x, r, θ) 로 계산되어지는 좌표를 간단히 사각영역으로 변환시키는 것이다.

일반적으로 3차원 영역에 대한 coordinate generating system의 지배방정식은 Poisson방정식으로 나타내 진다.

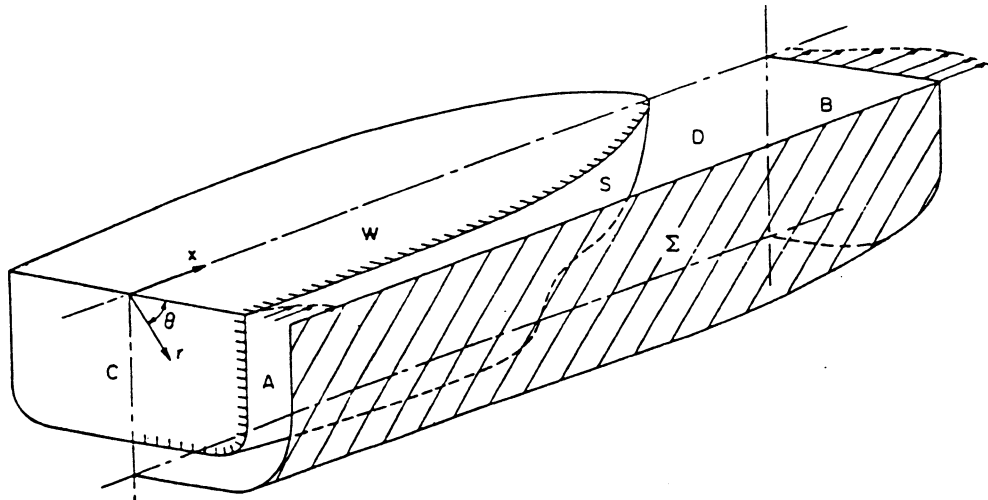


Fig. 1 Physical solution domain

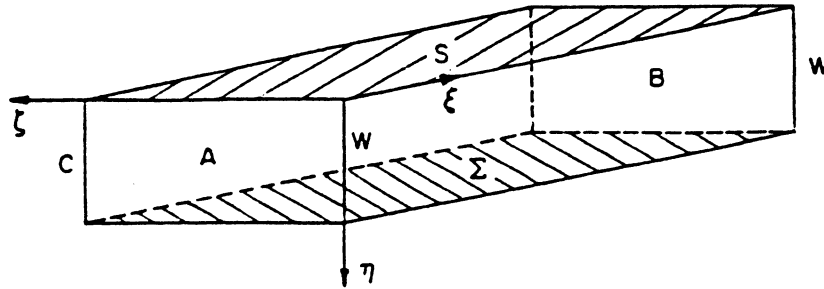


Fig. 2 Transformed Domain

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi &= f(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \eta &= f^r(\xi, \eta, \zeta) \\ \nabla^2 \zeta &= f^\theta(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (1)$$

혹은 $\nabla^2 \xi^i = f^i, i=1,2,3$

여기서 $\xi^1 = \xi, \xi^2 = \eta, \xi^3 = \zeta,$

윗식은 기본좌표계인 직교좌표계로 표시한 편미분 방정식이다.

∇^2 는 직교좌표계 $x'(x^1=y, x^2=z, x^3=z)$ 에서의 Laplacian operator이다.

여기서 함수 f 는 좌표점의 집중을 제어하는 함수로 f 는 x 축 방향의 분포를 제어하고 f^r 는 y 혹은 r 방향, f^θ 는 θ 방향을 제어하는 함수이다. 바람직한 격자분포를 얻기 위해서는 제어함수들의 결정이 중요한 인자로 작용한다.

타원형 편미분방정식의 해법은 직적으로 경계조건에 의하여 해가 결정되어지는 것으로 지배방정식의 경계치 문제(Boundary - values problem)로 귀착되게 된다. 즉 D 의 경계에서 주어지는 곡선좌표계의 값들을 갖고 곡선좌표계를 종속변수로 직교좌표계를 독립변수로 하여 D 의 내부에서 이들 좌표의 값을 구하는 것으로 physical 영역과 전환된 영역사이를 1대 1로 사상한다.

윗식을 수치적으로 해석하기 위해서는 경계면에서 Dirichlet 경계조건이나 Neumann 경계조건이 필요하다.

식 (1)은 $\xi - \eta - \zeta$ plane 즉, transformed plane에서 같은 격자 간격($\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$)을 가지고 모든 수치계산을 수행한다는 의미로 식 (1)을 그대로 사용하기에는 어려움이 있다. 그러므로 좌표계를 서로 바꾸어 직교좌표계의 값에 대하여 계산하는 것이 좀 더 편리하다고 할 수 있겠다. 즉 독립변수와 종속변수를 서로 바꾸는 일이다. 그 결과 직교좌표 (x^1, x^2, x^3) 는 종속변수가 되고 곡선좌표 (ξ, η, ζ) 는 독립변수가 된다.

이때 전환된 영역에서의 경계치 문제는 변환된 영역의 경계면에서 주어진 경계치 x' 로부터 직교좌표 내부의 $x=x'(\xi, \eta, \zeta)$ 의 값을 구하는 것이 된다.

변환면의 모든 경계가 정방형이므로 계산은 physical boundary의 형상에 관계없이 입방격자상에서 수행될 수 있다.

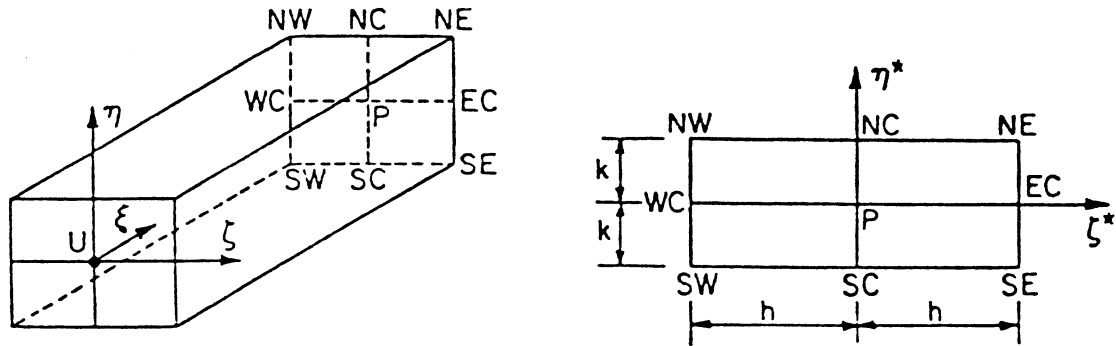


Fig. 3. Numerical Grid and symbols

식 (1)의 역변환을 얻기 위해서는 physical좌표와 전환된 좌표 사이의 관계가 Fig. 3과 같이 구해져야 하겠다.

2) 좌표 변환

직교좌표계 $x^i(x^1, x^2, x^3)$ 와 일반 비직교 좌표계 $\xi^i(\xi^1, \eta^2, \zeta^3)$ 사이의 관계에 대하여 기술한다.

이들 관계를 구하므로써 수치적인 격자 생성을 위한 Poisson 방정식에서 종속변수와 독립변수를 바꾸어 새로운 형태의 편리한 격자 생성의 식이 얻어지게 되고, 직교좌표계로 표현한 난류유동의 지배방정식인 Reynolds 방정식도 비직교수치 좌표로 변환된 식으로 나타낼 수 있게 된다.

일반좌표 ξ^i 에서 선요소(line element) vector $d\bar{r}$ 은 다음과 같이 관계를 갖는다.

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i$$

여기서 \bar{r} 은 위치 vector이고, i 의 세 요소의 합으로 표시된다.

여기서 covariant와 contravariant의 개념의 이용하여 다음과 같이 정의하여 사용한다.

• $\bar{r}/\partial \xi^i$ 을 covariant base vector로 \bar{a}_i 로 정의하면

$$\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^i}, \quad d\bar{r} = d\xi^i \bar{a}_i$$

좀더 일반적으로 임의의 vector \bar{A} 를 비슷한 방식으로 vector A 와 contravariant 성분 A^i 와 covariant base vector \bar{a}_i 로 나눈다.

$$\bar{A} = A^i \bar{a}_i$$

contravariant base vectors는

$$\bar{a}_i = \frac{\bar{a}_j \times \bar{a}_k}{J} = \frac{1}{J} \epsilon_{lmn} a_j^m a_k^n$$

i, j, k 는 순환

J 는 Jacobian

$$\bar{a}^i \cdot \bar{a}_j = \bar{a}_j \cdot \bar{a}^i = \delta_j^i$$

δ_j^i 는 Kronecker delta

임의 vector \bar{A} 는 contravariant base vector의 항으로 나눌수 있다.

$\bar{A} = A_i \bar{a}^i$, A_j 는 vector \bar{A} 의 covariant 성분이다.

\bar{a}^i 와 a_i 는 보통 단위길이가 아니므로 좌표선에 각각 법선방향이고 수직방향인 단위 vector는 $\bar{n}_i = \bar{a}^i / |\bar{a}^i|$, $\bar{n}_i = \bar{a}^i / |\bar{a}^i|$ 이다.

임의의 두점 r 과 $r+d\bar{r}$ 사이의 거리 ds 는

$$(ds)^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = (a_i \cdot a_j) d\xi^i \cdot d\xi^j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

여기서 g_{ij} metric tensor, 그리고 $g^{ij} = g_{ij}$ 임을 알 수 있다. Contravariant metric tensor g^{ij} 는 비슷한 방식으로 정의되어 질 수 있다.

$$g^{ij} = g^{ji} = \bar{a}^i \cdot \bar{a}^j$$

여기서 A^i 와 A_j 는 \bar{A} 의 physical 성분을 나타내고 있지 않다. Physical 성분을 $A(i)$ 로 표시한다면

$$A(i) = (g^{ii})^{1/2} A^i = (g^{ii})^{1/2} g^{ij} \bar{A}_j \text{이 된다.}$$

직교좌표 X^i 에서 임의의 vector A 는

$$A = E^i \bar{e}_i = E_i \bar{e}^i \text{로 나타내고}$$

covariant base vector \bar{e}_i 는

$$\bar{e}_i = \partial \bar{r} / \partial x^i = (h_1 \delta_1^i, h_2 \delta_2^i, h_3 \delta_3^i)$$

contravariant base vector \bar{e}^i 는

$$\bar{e}^i = (1/h_1 \delta_1^i, 1/h_2 \delta_2^i, 1/h_3 \delta_3^i) \text{로 나타낼 수 있다.}$$

유체 유동의 방정식은 흔히 직교좌표 x^i 에서 사용되어지므로 x^i 좌표계를 일반적인 비직교 좌표계

ξ로 변환시키는 것이 필요하다.

두 좌표계에서 dr는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\bar{dr} &= dx^i \bar{e}_i \\ &= d\xi^i \bar{a}_i\end{aligned}$$

ξ좌표에서 covariant base vector \bar{a}_i 는

$$\bar{a}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \bar{e}_j = (h_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}, h_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^i}, h_3 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^i})$$

\bar{a}_i 의 1번째 성분을 a_i^1 로 나타내면

$$\bar{a}_i^1 = (a_i^1)^1 = h_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}$$

혹은

$$a_i^1 = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & h_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & h_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ h_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & h_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & h_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ h_3 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & h_3 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & h_3 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}$$

metric tensor g_{ij} 와 g^{ij} 는

$$g_{ij} = h_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j}$$

$$g^{ij} = h^{lm} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}$$

scalar 함수 ϕ 의 Laplacian $\nabla^2 \phi$ 는

$$\nabla^2 \phi = \text{div}(\nabla \phi)$$

$\nabla \phi = \partial \phi / \partial \xi^i \times \bar{a}_i$, $\partial \phi / \partial \xi^i$ 는 ξ좌표계에서 $\nabla \phi$ 의 i번째 성분이다.

vector \bar{A} 의 divergence는 scalar 양이고 contravariant 성분 A^i 의 covariant derivative로 얻어진다.

$$\text{div } \bar{A} = \bar{A}^i{}_{,i} = \frac{\partial A^i}{\partial \xi^i} + \Gamma_{ij}^i A^j = \frac{\partial A^i}{\partial \xi^i} + \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^i} A^i \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (JA^i) \quad (1a)$$

여기서 Γ_{ij}^i 는 Christoffel 기호로 $(1/J) \partial J / \partial \xi^i$ 의 값이다.

$$A^i = E^i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \frac{1}{J} [b^i E(1)]$$

편의상 $\bar{b}^i = \bar{a}_j \times \bar{a}_k = J \bar{a}^i$ 로 사용하고 b^i 은 vector \bar{b}^i 의 1번째 성분이다.

그러므로 $\text{div } \bar{A} = 1/J \cdot \partial / \partial \xi^i (b^i E(1))$ 이다.

(1a)식은 contravariant 성분에 적용되어지므로 $\nabla \phi$ 의 contravariant 성분이 사용되어야 한다.

즉

$$\nabla^2 \phi = \text{div } (\nabla \phi)^i = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j})$$

혹은

$$\nabla^2 \phi = g^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij}) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \quad (2)$$

Poisson 방정식에 의해 ξ^i 좌표와 x^i 좌표와의 관계를 서술하면

$$\nabla^2 \xi^i = f \quad (3)$$

(2)식을 이용해서

$$f^i = \nabla^2 \xi^i = g^{ij} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial \xi^j \partial \xi^j} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij}) \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J g^{ij}) \quad (4)$$

직교좌표계에서 $J = h_1 h_2 h_3$, $g^{ij} = h_i \delta^{ij}$ 이므로 f 은 다음과 같은 metric coefficient의 항으로 표시한다.

$$f^i = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} (J h^{ii}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \right)$$

(4)식을 이용하면 (2)식의 오른쪽 두번째 항은 f 의 항으로 표현되어 질 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = g^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + f^i \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^i}$$

ϕ 대신 x^i 로 바꾸면

$$\nabla^2 x^i = g^{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^j \partial \xi^j} + f^i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \right) \quad (5)$$

이 된다. (5)식은 격자생성을 위한 지배방정식이다.

3) **Physical** 면에서의 **Cartesian** 좌표계와 원통 좌표계

3차원 계산영역을 물체에 적합시킨 격자계(body-fitted grid system)로 변환시키고 그 때 cartesian 좌표에서 $(h_1, h_2, h_3) = (1, 1, 1)$ 와 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ 로 하여 (5)식에 대입해서 다음과 같이 풀어 쓴다.

$$\begin{aligned} g^{11} x_{\xi\xi} + g^{22} x_{\eta\eta} + g^{33} x_{\zeta\zeta} + g^{12} x_{\xi\eta} + 2g^{13} x_{\zeta\xi} + 2g^{23} x_{\eta\zeta} + f^1 x_{\zeta} + f^2 x_{\eta} + f^3 x_{\xi} &= 0 \\ g^{11} y_{\xi\xi} + g^{22} y_{\eta\eta} + g^{33} y_{\zeta\zeta} + g^{12} y_{\xi\eta} + 2g^{13} y_{\zeta\xi} + 2g^{23} y_{\eta\zeta} + f^1 y_{\zeta} + f^2 y_{\eta} + f^3 y_{\xi} &= 0 \\ g^{11} z_{\xi\xi} + g^{22} z_{\eta\eta} + g^{33} z_{\zeta\zeta} + g^{12} z_{\xi\eta} + 2g^{13} z_{\zeta\xi} + 2g^{23} z_{\eta\zeta} + f^1 z_{\xi} + f^2 z_{\eta} + f^3 z_{\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

Cylindrical 좌표계에서는 $(h_1, h_2, h_3) = (1, 1, r)$, $(x^1, x^2, x^3) = (x, r, \theta)$

이므로

$$\begin{aligned} g^{11} x_{\xi\xi} + g^{22} x_{\eta\eta} + g^{33} x_{\zeta\zeta} + g^{12} x_{\xi\eta} + 2g^{13} x_{\zeta\xi} + 2g^{23} x_{\eta\zeta} + f^1 x_{\zeta} + f^2 x_{\eta} + f^3 x_{\xi} &= 0 \\ g^{11} r_{\xi\xi} + g^{22} r_{\eta\eta} + g^{33} r_{\zeta\zeta} + g^{12} r_{\xi\eta} + 2g^{13} r_{\zeta\xi} + 2g^{23} r_{\eta\zeta} + f^1 r_{\zeta} + f^2 r_{\eta} + f^3 r_{\xi} &= 0 \\ g^{11} \theta_{\xi\xi} + g^{22} \theta_{\eta\eta} + g^{33} \theta_{\zeta\zeta} + g^{12} \theta_{\xi\eta} + 2g^{13} \theta_{\zeta\xi} + 2g^{23} \theta_{\eta\zeta} + f^1 \theta_{\zeta} + f^2 \theta_{\eta} + f^3 \theta_{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

여기서 $g^{ii} = 1/g(g_{mj} \cdot g_{nk} - g_{mk}g_{nj})$ i, j, k 와 1, m, n 순환 cartesian 좌표계 :

$$\begin{aligned} g_{11} &= x \xi_2^2 + y \eta_2^2 + z \zeta_2^2 \\ g_{22} &= x \eta_2^2 + y \eta_2^2 + z \eta_2^2 \\ g_{33} &= x \zeta_2^2 + y \zeta_2^2 + z \zeta_2^2 \\ g_{12} &= g_{21} = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} + z_{\xi} x_{\eta} \\ g_{13} &= g_{31} = x_{\xi} x_{\zeta} + y_{\xi} y_{\zeta} + z_{\xi} x_{\zeta} \\ g_{23} &= g_{32} = x_{\eta} x_{\zeta} + y_{\eta} y_{\zeta} + z_{\eta} x_{\zeta} \\ g &= J^2 = g_{11} g_{22} g_{33} + 2 g_{12} g_{13} g_{33} - (g_{23})^2 g_{11} - (g_{12})^2 g_{33} \end{aligned}$$

cylinder 좌표계 :

$$\begin{aligned} g_{11} &= x \xi_2^2 + r \xi_2^2 + \theta \xi_2^2 \\ g_{22} &= x \eta_2^2 + r \eta_2^2 + \theta \eta_2^2 \\ g_{33} &= x \zeta_2^2 + r \zeta_2^2 + \theta \zeta_2^2 \end{aligned}$$

$$g_{12} = g_{21} = x_{\xi} x_{\eta} + r_{\xi} r_{\eta} + \theta_{\xi} \theta_{\eta}$$

$$g_{13} = g_{31} = x_{\xi} x_{\zeta} + r_{\xi} r_{\zeta} + \theta_{\xi} \theta_{\zeta}$$

$$g_{23} = g_{32} = x_{\eta} x_{\zeta} + r_{\eta} r_{\zeta} + \theta_{\eta} \theta_{\zeta}$$

(6)식은 격자제어 함수 f 가 구해지고 적당한 경계조건이 모든 경계면에서 주어지면 전환된 영역 Ω 에서 수치적으로 풀어진다.

기본적인 직교 좌표계의 선택은 편리한 쪽으로 취할 수 있다. 예를 들면 축대칭 물체에 대해서는 cartesian 좌표를 사용할 수 있지만 cylinder 좌표를 사용하는 것이 더 편리한 방법으로 생각되어진다.

3. 지배방정식의 차분화

격자 생성을 위한 지배방정식을 편리한 수치 해법으로 풀 수 있다. 여기서는 두개의 다른 유한차분법 즉 중심차분법(central - difference scheme)과 exponential scheme을 사용하여 차분화 한다.

중심차분법을 이용한 2차원 물체에 대한 지배방정식의 차분화된 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_{\xi, \eta} = & \{ (g^{11} + 0.5 f^1)_{\xi, \eta} r_{\xi+1, \eta} + (g^{11} + 0.5 f^1)_{\xi, \eta} r_{\xi+1, \eta} \\ & + (g^{22} + 0.5 F^2)_{\xi, \eta} r_{\xi, \eta+1} + (g^{22} + 0.5 F^2)_{\xi, \eta} r_{\xi, \eta-1} \\ & + 0.5 g_{\xi, \eta}^{12} (r_{\xi, \eta+1, \eta+1} + r_{\xi-1, \eta-1} - r_{\xi+1, \eta-1}) \} / [2(g^{11} + g^{22})_{\xi, \eta}] \end{aligned}$$

그러나 cell Reynolds number ($|F^2/g^{22}| > 2$)가 큰값을 가질때 중심차분법(central - difference scheme)은 부정확하게 된다.

이리하여 보다 정확도를 증진시키고 중심차분법(central - difference scheme)의 불안정을 피하기 위하여, Spalding등의 exponential scheme을 도입키로 한다.

중심차분법은 f, f, f 가 큰값을 가질 경우 아주 느리게 수렴을 하기 때문에 exponential scheme을 여기에 사용하고 부분적으로 source항에는 중심차분법을 사용한다. Exponential 방법과 중심차분법을 함께 사용하여 차분화한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (2g^{11} a \coth a + 2g^{22} b \coth b + 2g^{33} c \coth c)_{\xi, \eta, \zeta} \phi_{\xi, \eta, \zeta} \\ & = (g^{11} a \coth a)_{\xi, \eta, \zeta} (e^{-a} \phi_{\xi+1, \eta, \zeta} + e^a \phi_{\xi-1, \eta, \zeta}) \\ & + (g^{22} a \coth b)_{\xi, \eta, \zeta} (e^{-b} \phi_{\xi, \eta+1, \zeta} + e^b \phi_{\xi, \eta-1, \zeta}) \\ & + (g^{11} c \coth c)_{\xi, \eta, \zeta} (e^{-c} \phi_{\xi, \eta, \zeta+1} + e^c \phi_{\xi, \eta, \zeta-1}) \\ & + 0.5 g_{\xi, \eta, \zeta}^{12} (\phi_{\xi+1, \eta+1, \zeta} + \phi_{\xi-1, \eta-1, \zeta} - \phi_{\xi+1, \eta-1, \zeta} - \phi_{\xi-1, \eta+1, \zeta}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$+0.5 g_{\xi, \eta, \zeta}^{13} (\phi_{\xi+1, \eta, \zeta+1} + \phi_{\xi-1, \eta, \zeta+1} - \phi_{\xi+1, \eta, \zeta-1} - \phi_{\xi-1, \eta, \zeta-1})$$

$$+0.5 g_{\xi, \eta, \zeta}^{23} (\phi_{\xi, \eta+1, \zeta+1} + \phi_{\xi, \eta-1, \zeta+1} - \phi_{\xi, \eta+1, \zeta-1} - \phi_{\xi, \eta-1, \zeta-1})$$

여기서 ϕ 는 r 과 θ 를 나타낸다.

$$2a = -\frac{f^1}{g^{11}} = \frac{x_{\xi\xi}}{x_{\xi}} \Big|_{\xi = \text{constan } t}$$

$$2b = -\frac{f^2}{g^{22}} = \begin{cases} F_A(\eta) & \xi < \xi \\ F_C(\xi, \eta) & \xi_A \leq \xi \leq \xi \\ F_B(\eta) & \xi > \xi_B \end{cases} \quad \phi = r \quad \text{인 경우}$$

$$2b = -f^2 / g^{22} \quad \phi = \theta \quad \text{인 경우}$$

$$2c = -\frac{f^3}{g^{33}} = \frac{\theta_{\xi\xi}}{\theta_{\xi}} \xi = 1, \eta = NJ - 1$$

$$F_A(\eta) = -\frac{r_{\eta\eta}}{r_{\eta}} = \frac{\theta_{\xi\xi}}{\theta_{\xi}} \xi = 1, \xi = NK - 1$$

$$F_B(\eta) = -\frac{r_{\eta\eta}}{r_{\eta}} = \frac{\theta_{\xi\xi}}{\theta_{\xi}} \xi = NI, \xi = NK - 1$$

$$F_C(\xi, \eta) = [(\xi_B - \xi) F_A + (\xi - \xi_A) F_B] / (\xi_B - \xi_A)$$

NI, NJ, NK는 x, r, θ 방향의 격자갯수를 말한다.

4. 수치 해석

일정한 ξ 축의 모든 경계에서 주어진 Neumann 경계조건을 갖고 (7)식을 T. D. M. A.(Tri - Diagonal Matrix Algorithm)로 푼다. 여기서 S. O. R 은 1.05로 주어진다.

(7)식을 다음과 같이 간단한 형태로 정리하였다.

$$a_p \phi_p = a_n \phi_n + a_s \phi_s + a_e \phi_e + a_w \phi_w + S$$

여기서 $+a_e \phi_e, +a_w \phi_w, +S$ 는 전회 반복 과정에서의 값을 나타낸다.

ϕ 의 값중 $p \rightarrow i, n \rightarrow i+1, s \rightarrow i-1$ 로 하면 격자 생성의 지배방정식의 차분화된 형태를 아주 간단한 형태로 만들어진다.

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i$$

$$\phi_i A_i \phi_{i+1} B_i \phi_{i-1} C_i$$

(8)

$$(b_i/a_i A_i, c_i/a_i = B_i, d_i/a_i C_i)$$

그리고 $\phi_{i-1} = P_{i-1}\phi + Q_{i-1}$ 로 놓고 (8)식에 대입하면

$$\phi_i = \frac{A_i}{1 - B_i p_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{B_i \phi_{i-1} + C_i}{1 - B_i p_{i-1}} \quad \text{이 된다.}$$

여기서,

$$p_i = \frac{A_i}{1 - B_i p_{i-1}}, Q_i = \frac{B_i \phi_{i-1} + C_i}{1 - B_i p_{i-1}}$$

경계조건을 적용하면

$$\phi_1 = A_1 \phi_2 + C_1, P_1 = A_1, Q_1 = C_1$$

$$\phi_n = B_n \phi_{n-1} + C_n, Q_n = \phi_n, P_n = \text{이 된다.}$$

위의 경계조건을 이용하여 ϕ_i 를 계산한다.

5. 결론

Exponential scheme을 이용하여 물체 적합 좌표계(Body-fitted grid)가 효율적으로 생성되어졌

3 : 1 BODY, THETA=0 DEGREE

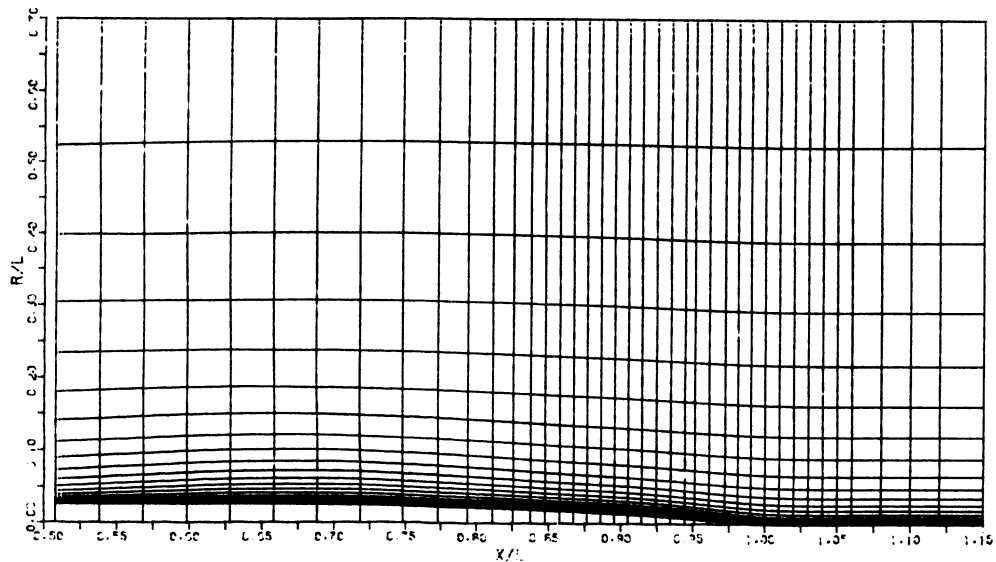


Fig. 4. Numerical Grid for the 3 : 1 Elliptic Body Longitudinal view $\theta=0^\circ$ and 90°

(a) 3 : 1 BODY, THETA=0 DEGREE

3:1 BODY, THETA=90 DEGREE

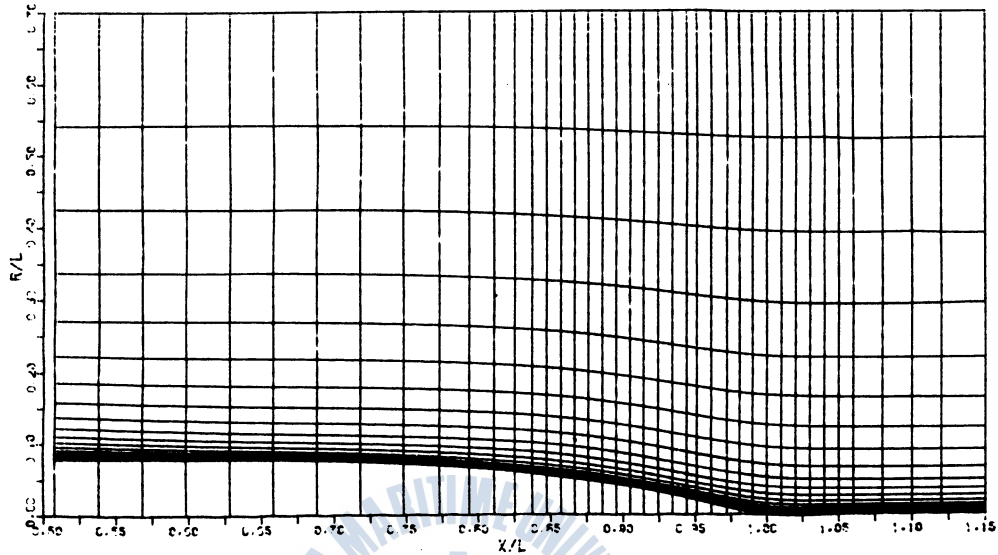


Fig. 4. Numerical Grid for the 3 : 1 Elliptic Body Longitudinal view $\theta=0^\circ$ and 90°
(a) 3 : 1 BODY, THETA=90 DEGREE

다. 계산 결과 exponential scheme을 사용한 방법을 중심차분법(central - difference scheme)을 사용한 방법보다는 상당히 빨리 수렴하는 것을 알 수 있었다. 이는 cell Reynolds number가 큰 경우 논문에서 지적했듯이 중심차분법(central - difference scheme)을 사용할 경우 아주 더디게 수렴하게 된다.

본 연구를 위해 작성된 전산조직은 3:1 elliptic body에 근거하여 만들어졌다. 신체와 같이 복잡한

$X/L = 0.54$

$X/L = 0.66$

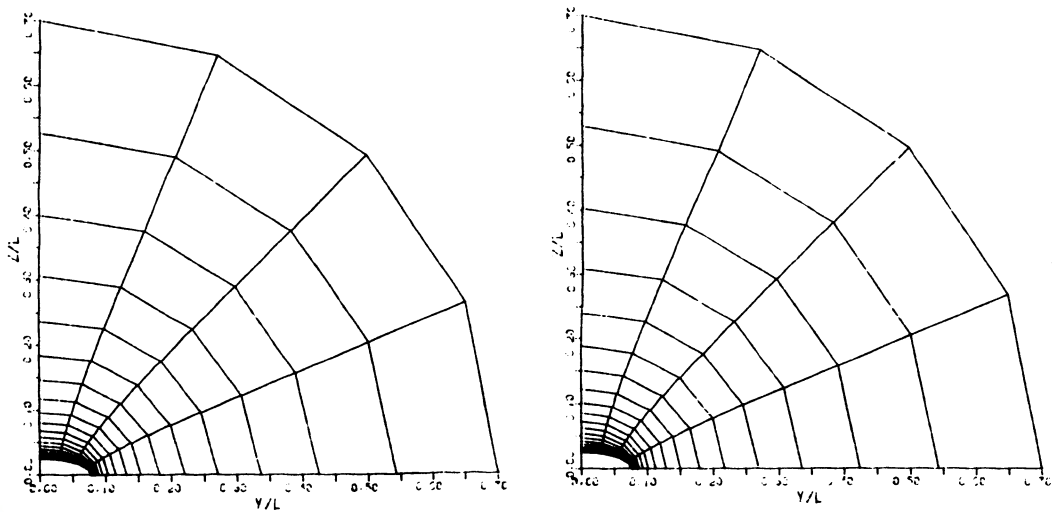


Fig. 5. $X/L=0.54, 0.66$

$X/L = 1.05$

$X/L = 1.15$

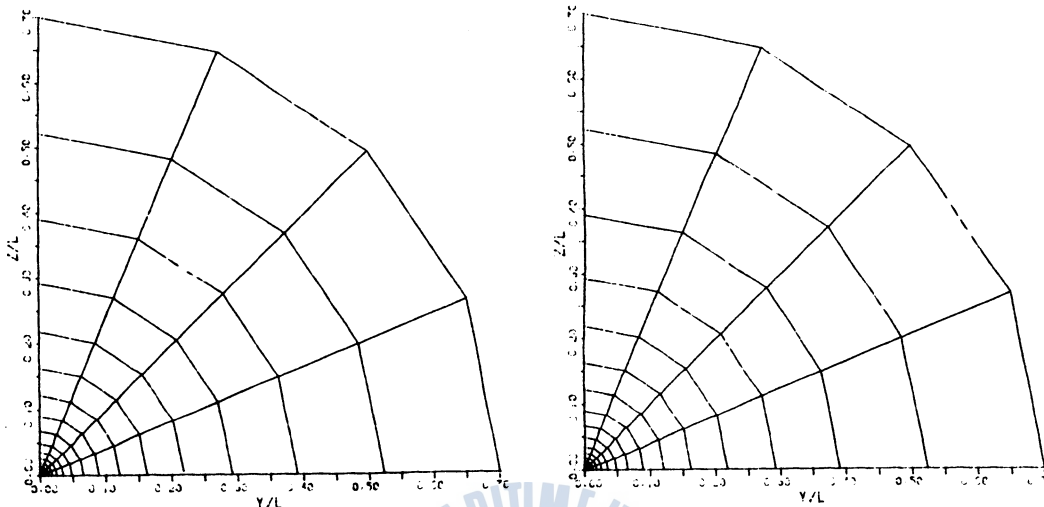


Fig. 5. $X/L=1.05, 1.15$

$X/L = 0.86$

$X/L = 0.97$

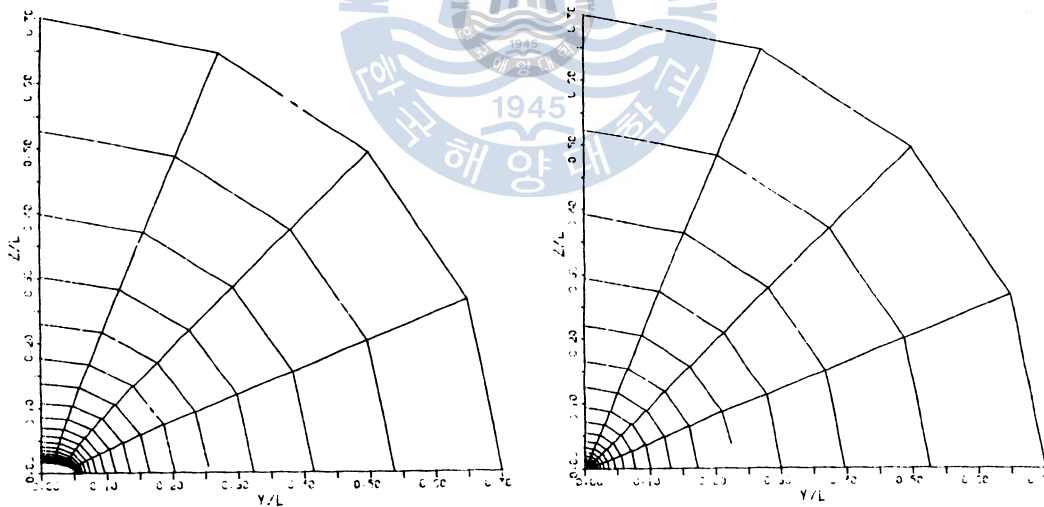


Fig. 5. $X/L=0.86, 0.97$

형상에 대해서는 r 방향의 격자제어 함수 f 의 수정만을 행하므로써 해석되어질 수 있다. 본 연구의 결과는 Fig. 4와 Fig. 5 같이 3차원 선형주위의 점성 유동해석을 하는데 있어 중요한 입력 자료로 활용될 수 있을 것이다.

수치계산 과정은 유동해석의 지배방정식을 차분화시켜 수치해석을 행하는데 사용되는 T. D. M.A (Tri - Diagonal Matrix Algorithm)를 이용하였다.

Reference

- 1) THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A. and MASTIN, C. W. 1982 "boundary - Fitted Coordinates Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review", J. Comp. Phys., Vol. 47, pp 1 - 108
- 2) H. C. Chen and V. C. Patel 1985 "Calculation of Trailling - edge, Stern and Wake Flows by a Time - Marching Solution of the Partially - Parabolic Equation", I. I. H. R. Report No. 285
- 3) V. C. Patel, H. C. Chen and S. Ju, 1988 "Solution of the fully - Elliptic Reynolds - Averaged Navier - Stokes Equations and comparisions with Experiments" I. I. H. R. Report No. 323
- 4) M. C. Richmond, H. C. Chen, and V. C. Patel 1983 "Equation of Laminar and Turbulent Flow in General Curvilinear Coordinates" I. I. H. R. Report No. 300
- 5) J. E. Carter, D. E. Edwards, and M. J. Werle 1980 "A New Coordinates Transformation for Turbulent Boundary Layer Flows" N. A. S. A.
- 6) S. K. Dey 1980 "Nonlinear Grid Error Effects on Numerical Solution of Partial Differential Equations" N. A. S. A.
- 7) K. D. Lee, M. Huang, N. J. Yu and P. E. Rubbert 1980 "Grid Generation for general Three - Dimensional Configurations" N. A. S. A.
- 8) Reese L. Sorenson 1980 "Numerical Generation of Two - Dimensional Grids by the Use of Poisson Equations with Grid Control" N. A. S. A.
- 9) 강 신형 1988 "캐비테이션 터널에서 후류모사를 위한 매쉬 설계 및 성능 예측에 관한 연구" 서울대학교 공과대학 부속 생산 기술 연구소
- 10) Suhas V. and Patankar 1980 "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" MAGRAW - HILL Book Company
- 11) H. J. Cronder and C. Daiton, 1971 "Errors in the Use of Nonuniform Mesh Systems", J. Comp. Phys., T. 32 - 45