

양자 Hall 계에서의 준입자의 상호작용 에너지

이 삼 념

한국해양대학교, 부산 606-791

구 표면에서 상호작용하는 전자들에 대한 정확한 수치적 결과를 통해 준전자(quasielectrons)와 준홀(quasiholes)의 에너지와 그들의 상호작용 에너지를 구하였다. 이는 유사 포텐셜 모델에 의한 Johnson등의 결과와 정성적으로 일치하였다. 한편 neutralizing background 효과를 고려하여 준입자 상호작용 에너지를 구하고 이를 Beran등의 결과와 비교하였다

I. 서 론

강한 자기장과 낮은 온도에서 높은 이동도의 GaAs-Al_xGa_{1-x}As 양자구조에서 분수양자 Hall 효과(Fractional Quantum Hall Effect, FQHE)의 현상을 관찰할 수 있다[1,2,3]. 이 현상은 전자밀도의 특별한 값에서 세로 저항에 최소값을 나타냄과 동시에 Hall 저항이 $R_H = h/fe^2$ 에서 양자화된 플래토(plateaus)를 만든다. 여기서 f 는 정수이거나 분수이다. 이러한 FQHE의 이유는 2차원에 구속되어 서로 상호작용하는 전자들이 여기상태로부터 바닥상태를 분리하여 에너지 갭을 만들기 때문이다. FQHE에 대한 밀도와 자기장은 Landau레벨(LL) 채움인자(filling factor) $\nu = p/q$ 에 해당된다. 이때 q 는 홀수 정수가 된다. 이러한 현상을 설명하기 위해서 Jain은 복합페르미온(Composite Fermion, CF)모델을 제시했는데 이는 각각의 전자가 가상의 다발인 짝수(2S)의 다발양자(flux quanta)를 운반한다[4]. 전자에 속박된 짝수의 다발양자는 부분적으로 외부 자기장을 소거시키는 효과를 가지며 따라서 CF는 실제 줄어든 자기장을 접하게 되며 CF는 평균장 $B^* = B - 2p\rho\Phi_0$ 를 갖게 된다. 이때 B 는 외부자기장, ρ 는 전자밀도, p 는 정수, $\Phi_0 = hc/e$ 이다. 이러한 CF에 의한 정수값 p 에서의 정수 양자 Hall 효과(Integer Quantum Hall Effect)는 원래의 전자계에서 채움인자 $\nu = p/(2Sp+1)$ 에서 FQHE로 바뀐다. 따라서 FQHE는 CF의 IQHE로서 간주할 수 있다. 후에 Lopez와 Fradkin은 Chern-Simons 게이지 장(gauge field)을 도입하므로써 CF 모델에 대한 FQHE 연구를 위한 공식을 전개했다[5]. 한편 Halperin, Lee, Read는 이들 CF를 탐구하기 위해 반 채워진 LL의 성질을 연구해 왔다[6]. 이들에 따르면 채움인자 $\nu = p/(2Sp+1)$ 의 상태에 해당되는 한개의 입자의 여기 갭은 유효 사이클로트론 진동수에 해당된다. 여기된 CF(excited CF)는 FQHE 바닥상태의 준전자(quasielectrons, QE)라 불리고 뒤에 남은 호울은 준홀(quasiholes, QH)이라 불린다[7]. 최근의 몇몇 실험에 의하면 반 채워진 LL 근방에서 반고전 사이클로트론 케도를 측정하므로써 CF 존재에 대한 좋은 실험 결과를 얻고 있다 [8,9,10].

II. 준 입 자

Laughlin의 이론은 주로 주된 채움인자 $\nu=1/m$ (m 은 홀수 정수)에서 FQHE를 설명하고 있는데 Laughlin 상태 $\nu=1/m$ 이외의 채움인자에서 FQHE를 설명하기 위해서 Haldane과 Halperin은 $1/m$ 상태에서의 QE 혹은 QH 여기는 새로운 비압축성 유체 상태를 형성한다는 계층(hierarchy) 이론을 제시했다[11,12,13,14]. Laughlin 묘사의 주목할만한 확립은 자기장이 동경방향으로 가해질 때 구표면에서 움직이도록 구속된 몇개의 전자($N \leq 10$)에 대한 상호작용 하밀토니안의 엄밀한 수치 대각화에 의해서 얻어졌다. 이러한 엄밀한 대각화에 의한 연구 방법은 이 분야에서 주된 역할을 해왔으며 구모양의 구조는 유한한 크기의 계에 있어서 균질한 유체상태의 연구에 적합하다. 이는 유한한 입자수 N 에 대해 병진이나 회전 등에 대해 변하지 않는 상태가 되는 유일한 구조이기 때문이다. 이 구조에서 자기단극은 반경 R 의 구의 중심에 놓여져 동경 방향으로 자기장 B 를 생성한다. Dirac양자화 조건에 의해 구를 통한 전체 다발 $4\pi R^2 B$ 는 정수 $2S$ 와 다발양자 $\Phi_0 = hc/e$ 의 곱과 같다. 운동에너지의 고유치는 $E_l = (h\omega_c/2S)[l(l+1) - S^2]$ 로 주어진다. 여기서 각운동량 고유치 l 은 $S, S+1, S+2, \dots$ 등의 값을 가질 수 있다. 명백히 값이 낮은 LL은 $l=S$ 이고 n 번째 여기 LL은 $l=S+n$ 이다.

만약 계의 모든 전자들이 가장 낮은 LL에 놓여있고 LL들 사이의 결합을 무시한다면 결과적인 다체현상은 유한한 차원의 Hamiltonian 행렬로서 풀려질 수 있다. 이 행렬은 에너지 고유치와 고유벡터를 구하기 위한 보편적 방법으로 대각화 시킬 수 있다. 따라서 FQHE의 연구에 정확하고 유한한 크기의 대각화 방법이 중요한 수단이 되었다. 실제 2차원에서 서로 상호 작용하는 몇개 전자(4~10)의 정확한 대각화에 의한 수치계산은 Laughlin 이론이 잘 맞다는 것을 증명해 주고 있다.

다체 상태들은 전체 각운동량 L 과 그것의 z 성분 M 에 따라 분류될 수 있다. 전자-전자 상호작용의 행렬요소 H_I 는 다음을 만족한다

$$\langle \alpha' L' M' | H_I | \alpha L M \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \langle \alpha' L | H_I | \alpha L \rangle \quad (1)$$

여기서 α 는 같은 L 에 대해 다른 축퇴 상태를 표시한다. 그리고 환산 행렬요소 $\langle \alpha' L | H_I | \alpha L \rangle$ 은 M 에 독립이다. 이것은 대각화 되어져야 할 행렬의 크기를 상당히 줄여 준다. 수치 결과에서 얻어진 스펙트럼은 전체 각운동량 L 의 각각의 값에 대한 에너지 값을 준다. Laughlin $\nu=1/m$ 상태에 대해서 $2S_{(\nu=1/m)} = \frac{1}{\nu}(N-1) = m(N-1)$ 의 값을 가지고, 예를들어 $N=8$ 에 대해서 $2S_{(\nu=1/m)} = m(N-1) = 3(8-1) = 21$ 의 값은 $\nu=1/3$ 상태 즉 Laughlin 액체상태에 해당한다. Laughlin 상태에 대한 값에 가까운 $2S$ 의 값에 대해 $2S = 2S_{(\nu=1/m)} + n_{QH} - n_{QE}$ 를 만족한다. 여기서 n_{QE} 와 n_{QH} 는 각각 여기된 QE와 QH의 수이다. 따라서 $n_{QH} - n_{QE}$ 는 $-1 \sim -5$ 까지의 값에 해당되는 $2S$ 의 값은 20부터 16까지이다. 이러한 스펙트럼의 가장 낮은 에너지 영역은 $n_{QH}=0$ 일때 이므로 n_{QE} 는 이러한 5개의 $2S$ 값에 대해서 1에서 5까지의 값을 가진다. 예를들면 $2S = 2S_{(\nu=1/m)} + n_{QH} - n_{QE} =$

$21 + n_{QH} - n_{QE}$ 가 되므로 $2S=19=21-2$ 에서와 같이 $n_{QE}=2$ 가 된다. 첫번째 여기 영역은 한 개의 QE-QH쌍을 포함할것으로 기대된다.

한편 외부에서 가한 자기장 \vec{B} 에 반대방향으로 방향이 잡혀지는 가상다발에 의한 효과는 $2S$ 의 값을 CF에 작용하는 유효다발 $2S^* = 2S^*_{\nu=1} + n_{QH} - n_{QE}$ 로 변환시킨다. 여기서 유효 채움인자 ν^* 는 $\frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{\nu} - 2p$ 를 만족하게 되며 $\nu=1/3$ Laughlin상태는 $\nu^*=1$ CF 상태에 대응되고 N 개 입자계에 대해서 $2S^*_{\nu=1} = N-1$ 이 된다. S 가 전자에 대해 하는 역할과 마찬가지로 S^* 는 CF에 대해 같은 역할을 한다. 가장 낮은 CF Landau레벨에서 입자의 각운동량은 QH 여기의 각운동량에 대해서 주어지는 S^* 와 같아야 한다. 즉, $l_{QH} = S^*$ 이다. 왜냐하면 QE여기는 보통의 비어있는 첫번째 여기된 CF Landau 레벨 $l_{QE} = S^* + 1 = l_{QH} + 1$ 에서의 CF들 이기 때문이다. 평균장 근사에서 한개의 QE-QH 쌍의 에너지는 바로 CF 사이클로트론 에너지 $\hbar\omega_c^*$ 이다. 하지만 한개의 QE 혹은 QH는 Laughlin의 진공상태와 상호 작용해야 한다. 실험 데이터로서 구위에 있는 N 개 전자에 대한 정확한 수치적 대각화의 결과로부터 재규격화된 준입자 에너지 ϵ_{QE} 와 ϵ_{QH} 를 현상학적으로 결정한다. 예를들면 8개 전자계의 Laughlin 응집상태는 $2S=21$ 에서 일어난다. 그리고 각운동량 $L=0$ 를 갖는다. 한개의 QE는 $2S=20, L=4$ 에서 존재한다. 한개의 QH는 $2S=22, L=4$ 에서 일어난다. 에너지 ϵ_{QE} 는 단순히 $2S=21$ 에서 Laughlin 응집상태의 최소 에너지와 $2S=20$ 에서의 최소에너지 사이의 차이이고 ϵ_{QH} 는 $2S=21$ 에서 Laughlin 응집상태의 최소에너지와 $2S=22$ 에서의 최소에너지의 차이이다. QE(혹은 QH) 상태를 고려함에 있어서 전자의 수와 구의 반경을 일정하게 두고 $2S$ 의 값을 바꾼다.

III. 상호작용 에너지

Landau 이론에서 상호작용하는 전자계의 에너지는 각각의 준입자(Quasiparticle, QP)들의 함과 다른 준입자와 서로 상호 작용을 나타내는 항을 더하므로써 주어진다. n_{QE} 개 QE와 n_{QH} 개 QH를 포함하는 상태의 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E = E_0 + \sum_{QP} \epsilon_{QP} n_{QP} + \frac{1}{2} \sum_{QP, QP'} V_{QP, QP'}(L_{QP, QP'}) n_{QP} n_{QP'} \quad (2)$$

마지막 항은 전체 각운동량이 $L_{QP, QP'}$ 인 QP쌍들의 상호 작용에 의한 에너지 변화의 함을 나타낸다. QP-QP 상호 작용함수 $V_{QP, QP'}(L)$ 는 준입자들의 한개의 쌍 (2QE, 2QH 혹은 1QE+ 1QH)를 포함하는 상태에 대한 정확한 수치적 에너지와 각각의 준입자들의 에너지의 함을 비교해 보므로써 구할 수 있다. 한편 구표면에 QE와 QH가 전하를 가지고 있기 때문에 background에서 $|e|(N \pm \frac{1}{m})$ 의 neutralizing charge를 가정하는 교정을 포함시켜야 한다[15]. 이미 우리들은 지난번 논문에서 이러한 neutralizing 효과를 고려하지 않았을 때의 결과를 얻었던 바가 있다[16,17]. 따라서 본 논문에서는 이러한 효과를 고려했을 때의

energy가 shift 되는 정도를 관찰하고자 한다. neutralizing positive charge background의 효과를 고려하기 위해서는 구 표면에 N 개 전자가 있을 때 background로서 구의 중심에 $+Ne$ 전자가 있으면 이들의 상호작용 coulomb 포텐셜 에너지는 $-N^2/2R$ 이 된다. 모든 에너지는 e^2/ℓ_0 의 단위로 측정된다. ℓ_0 는 Laughlin상태에 해당하는 자기장에서 자기길이 ($=\sqrt{h/eB}$, magnetic length)이다. 따라서 background의 self energy는 $N^2/2R$ 이 되므로 이 두 효과를 고려하면 $-N^2/2R$ 혹은 좀더 상세하게는 $-(N^2 - \nu^2)/2R$ 의 에너지 shift가 일어난다.

그림1에서는 상호작용 함수 $V_{QE-QH}, V_{QH-QH}, V_{QE-QE}$ 를 각운동량의 함수로서 그렸다. 이 커브는 준입자 에너지의 Halperin 형태를 사용해서 얻어졌다. 이때 점선으로 연결된 수치들은 neutralizing background 효과에 의한 energy shift를 고려하였을 때의 수치이다. 그림 1(a)에는 횡좌표는 전체 각운동량 L 이고 그림1(b)와 (c)에서는 두개의 동일한 입자들의 상호작용을 기술하기 위해서 입자쌍의 상대적인 각운동량인 $RAM (=L_{max} - L)$ 이란 개념을 도입하였다[18]. L_{max} 은 입자쌍의 전체 각운동량의 허용된 가장 큰 값이다. 이는 Johnson과 Canright에 의해 두 개의 동일한 입자들의 상호작용을 기술하기 위해서 도입된 개념이다. dc자기장이 있을때 동일한 전하를 가진 입자는 서로 반발하므로서 각각 그들레로 궤도를 만든다. 이러한 공간 분리는 입자들의 상대적인 각운동량에 의존한다.

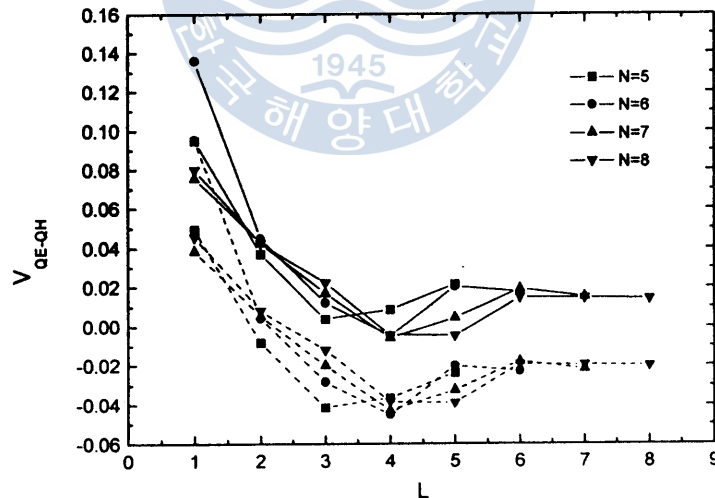


그림1(a) ; 전자수 $N=5,6,7,8$ 에 대해 전체 각운동량 L 의 함수로서의 V_{QE-QH} . 점선으로 연결된 커브들은 $\epsilon_{QE}, \epsilon_{QH}$ 에 self energy를 고려하므로서 구한 값이다. 에너지 단위는 e^2/ℓ_0 이고 ℓ_0 는 Laughlin $\nu=1/3$ 상태에서의 자기길이이다.

양자 Hall 계에서의 준입자의 상호작용 에너지

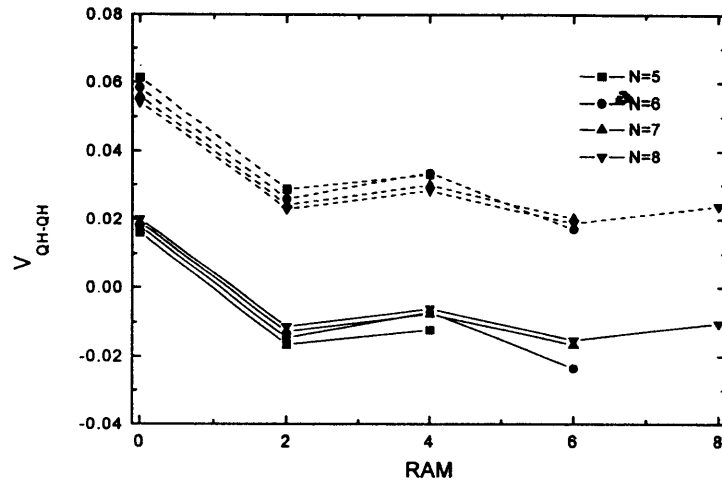


그림1(b) ; $RAM = L_{\max} - L$ 에 의해 정의 된 상대적인 각운동량의 함수로서 구한 V_{QH-QH} . L 은 QH층의 전체 각운동량이고 L_{\max} 는 이것의 최대값. 점선으로 연결된 커브들은 ϵ_{QH} 에 self energy를 고려하므로서 구한 값이다.

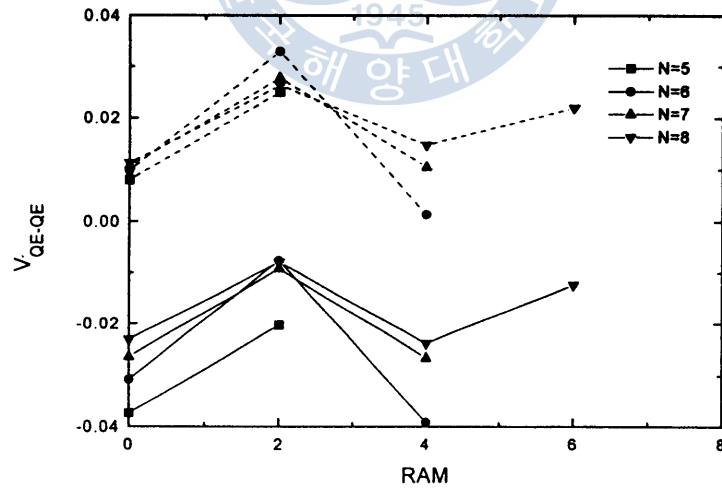


그림1(c) ; RAM 함수로서 구한 V_{QE-QE} . 점선으로 연결된 커브들은 ϵ_{QE} 에 self energy를 고려하므로서 구한 값이다.

IV. 결과

Beran과 Morf가 두개의 QH의 상호작용 에너지를 상대적인 각운동량의 함수로 구한 결과는 항상 양의 값을 나타내고 있다 [19]. 이는 본논문의 self-Coulomb energy 효과를 고려했을때의 상호작용에너지가 항상 양의 값을 가지면서 이들과 유사한 커브를 나타내고 있음을 볼 수 있다. 한편 self-Coulomb energy 효과를 고려하지 않았을때의 결과는 음의 값을 가지는 상호작용 에너지가 있으므로 이는 Johnson과 Canright의 유사포텐셜(pseudo-potential)모델에 의한 두개의 QH 상호작용 결과와 정성적으로 일치되고 있다[18]. Beran등은 원반기하학(disk geometry)하에서의 파동함수를 사용하였으나 이들의 결과들이 준입자들의 에너지 상태들을 결정하는데 서로 어떤 연관성이 있는지는 좀더 세심한 비교가 필요하다. 앞으로의 과제는 이러한 준입자 상호작용의 결과를 좀더 구해보므로서 FQHE 계층구조의 특성을 좀더 자세히 설명하고자 한다. 또한 이제까지의 FQHE는 주로 10개 입자보다 작은계에서 연구되어 졌는데 최근 Jain 등에 의하면 CF이론을 사용하여 그 이상의 더 큰계에서도 비압축 유체상태에 대한 정보를 얻을 수 있음을 시도하고 있다[20]. 그들은 이러한 큰계에 대해 입자당 기저상태 에너지를 얻고 있는데 앞으로 이와같은 큰계에 대해서 QE-QH쌍의 에너지와 QP상호작용 에너지를 구해보고자 한다.

참 고 문 헌

- [1] D.C.Tsui, H.L.Stormer, and A.C.Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559(1982).
- [2] R.Willet, J.P.Eisenstein, H.L.Stormer, D.C.Tsui, A.C.Gossard, and J.H.English, Phys. Rev. Lett. **59**, 1776(1987).
- [3] M.Shayegan, J.Jo, T.W.Suen, M.Santos, and V.J.Goldman, Phys. Rev. Lett. **65**, 2916(1990).
- [4] J.K.Jain, Phys.Rev.Lett. **63**, 199(1989); Phys. Rev. B **41**, 7653(1990); Adv.Phys. **41**, 105(1992); Science **266**, 1199(1994).
- [5] A.Lopez and E.Fradkin, Phys. Rev. B **44**, 5246(1991).
- [6] B.I.Halperin, P.A.Lee and N.Read, Phys. Rev. B **47**, 7312(1993).
- [7] X.G.Wu and J.K.Jain, Phys. Rev. B **51**, 1752(1995).
- [8] R.R.Du, H.L.Stormer, D.C.Tsui, A.S.Yeh, L.N.Pfeiffer, and K.W.West Phys. Rev. Lett. **73**, 3274(1994).
- [9] H.C.Manoharan, M.Shayegan, and S.J.Klepper, Phys. Rev. Lett. **73**, 3270(1994).
- [10] V.J.Goldman, B.Su, and J.K.Jain, Phys. Rev. Lett. **72**, 2065(1994).
- [11] The Quantum Hall Effect, edited by R.E.Prange and S.M.Girvin (Springer-Verlag, New York, 1990)
- [12] F.D.M.Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605(1983).
- [13] B.I.Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583(1984).
- [14] J.K.Jain, Phys. Rev. B **41**,7683(1990).
- [15] G.Fano, F.Ortolani, E.Colombo, Phys. Rev. B, **34**, 2670 (1986)
- [16] S.N.Yi, X.M.Chen and J.J.Quinn, Phys. Rev. B **53**, 9599(1996)

- [17] P.Sitko, S.N.Yi, K.S.Yi and J.J.Quinn, Phys. Rev. Lett, **76**, 3396 (1996)
- [18] M. Johnson and G.Canright, Phys. Rev.B **49**, 2947 (1994)
- [19] P.Beran and R.Morf, Phys. Rev. B **43**, 12654(1991)
- [20] R.K.Kamilla and J.K.Jain, Phys. Rev. B **55**, 9824(1997).

Interaction Energy of Quasi Particles in the Quantum Hall Systems

Sam Nyung Yi

Korea Maritime University, Pusan 606-791

The interaction energies of quasielectrons and quasiholes are investigated with the exact numerical results for a small number of electrons on a spherical surface. The results agree qualitatively with Johnson et al's results which are based on the pseudopotential model. And it is also compared with Beran et al's results by considering the effect of neutralizing background.



