

PISTON-CRANK MECHANISM의

等価電氣回路 換算에 關한 研究

盧 彰 注

A Study of a Simulator for Piston-crank Mechanism

No Changjoo

目 次

I. 緒 論	V. 結論 및 앞으로의 研究課題
II. 記 號	VI. 註
III. 本 論	VII. 參考文獻
IV. 適 用 例	

Abstract

A lot of recent researches have shown that, in control engineering, it is quite effective to analyze the complex mechanical systems, particularly vibrating systems, by means of the electrical analogous method which simulates each mechanical element with equivalent electrical circuits. In the study of such a simulator problem, however, there still remain much difficulties unsolved such as how to deal coulomb friction, how to linearize nonlinearities etc.

Here, the author intends to analyze theoretically a 4-cycle internal combustion engine by electrical analogous method. In this paper, coulomb friction was linearized to the equivalent viscous friction in view of loss energy and weight of the connecting rod was divided into two parts so as to simplify the analyses, and a special generator circuit was used to transform the reciprocating force to the torque.

Severeral theoretical analyses showed good results as expected.

I. 緒 論

最近 機械運動의 研究方法이 매우 달라져가고 있다. 過去에는 主로 微分方程式을 세워서 初期條件이나 境界條件을 주어 數學的으로 푸는 것이었다. 그러나 이 方法은 微分方程式의 解를 구하는 것이 큰 難關이고 實際 不可能할 때가 많았다.

그러나 電氣回路論의 急進의 發達로 因하여 機械的 要素를 電氣的 要素로 對應시켜 機械的 結合을 電氣回路로 置換시키므로써 機械問題를 電氣問題로 解析可能하게 되었고 또 機械系와 電氣系의 複合으로 된 機械裝置에 있어서도 機械系를 電氣系로 換算하므로써 全體를 電氣的으로 解析할 수 있게 되었다.

이러한 電氣的 解析은 實驗이 容易하고 計測의 誤差가 적은 點에서 絶對的 利點을 가지는 것이다.

여기 參考로 第一表에 機械的 量과 電氣的 量間의 對應要素의 一覽表를 揭載해 두고 本論文에서는 힘(廻轉力)과 電壓인 Analogue系를 擇하기로 한다.

第一表

機 械 量		電 氣 量	
並 進 運 動	廻 轉 運 動	力 (廻轉力) ⇄ 電 壓	力 (廻轉力) ⇄ 電 流
힘 (kg) f	廻轉力 (kg.m) τ	電 壓 (volt) e	電 流 (Amp) i
速 度 (m/sec) V	角速度 (Rad/sec) ω	電 流 (Amp) i	電 壓 (Volt) e
變 位 (m) $x=fvdt$	廻轉角 (Rad) $\theta=f\omega dt$	電氣量 coulomb $q=fdt$	
質 量 (kg sec ² /m) m	慣性모멘트(kgm sec ²) J	自己인덕턴스(Henry) L	靜電容量 (Farad) C
Compliance(m/kg) $\frac{1}{k}$	廻轉Compliance (rad/kgm) $\frac{1}{\zeta}$	靜電容量 (Farad) C	自己인덕턴스(Henry) L
抵 抗 (kg sec/m) c	廻轉抵抗(kgm sec/rad) γ	電氣抵抗 (ohm) Ω	콘덕턴스 (Mho) G

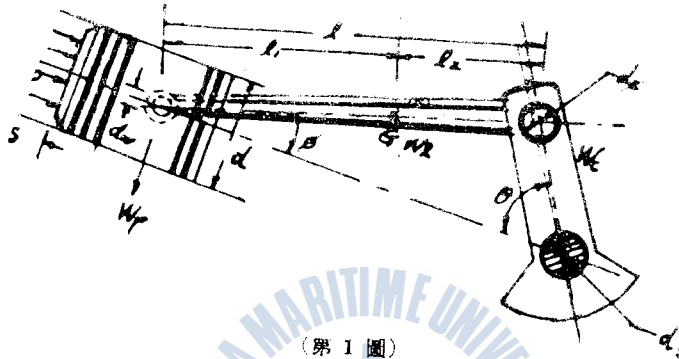
I. 記 號

- p : Piston에 加해지는 全壓力 (kg or lb)
 W_p : Piston의 무게 (kg or lb)
 W_c : Connecting rod의 무게 (kg or lb)
 W_c : 廻轉部の 크랭크 半徑에 換算한 무게 (kg or lb)
 ω : 엔진의 Crank 角速度 (rad/sec)
 s : Piston의 變位 (m or ft)
 ϕ : Connecting rod의 傾斜角(rad)
 θ : Crank의 基準線에 對한 廻轉角 (rad)
 F : 往復運動物體의 抵抗力 (kg or lb)
 W_r' : 換算된 往復部 重量 (kg or lb)
 W_c' : 換算된 廻轉部 重量 (kg or lb)
 p_r : Connecting rod로 傳해지는 힘 (kg or lb)
 d : Piston의 直徑 (m or ft)
 μ : 運動摩擦係數 (μ_1 往復部分
 μ_2 廻轉部分)
 d_s : 主軸의 直徑 (m or ft)
 d_w : Piston pin의 直徑 (m or ft)
 g : 重力加速度 (m/sec² or ft/sec²)
 d_c : Crank pin의 直徑 (m or ft)
 a : Piston의 加速度 (m/sec², ft/sec²)
 r : Crank 半徑 (m or ft)
 $q = \frac{r}{\ell}$:
 γ : 廻轉運動의 粘性抵抗 (kg m sec/rad, lb ft sec/rad)
 c : 往復運動의 粘性抵抗 (kg sec/m, lb sec/ft)
 v : Piston의 速度 (m/sec, ft/sec)
 p_r' : Connecting rod의 水平分力 (kg or lb)

- J : 回轉運動部分의 主軸에 關한 極慣性 모멘트 (kg m sec², lb ft sec²)
- w_c : 1배어링에서 支持하는 重量 (kg or lb)
- r_c : 回轉運動部分의 偏心거리 (m, ft)
- p_R : Piston ring의 單位 길이당 氣筒을 壓搾하는 힘 (kg/m, lb/ft)
- l : Connecting rod의 길이 (m or ft)

III. 本 論

중부하 인 플라이휠로 인하여 一定한 角速度 ω 로 廻轉하고 있는 橫型單실린더 4사이클 內燃機關을 假定한다.



(第 1 圖)

먼저 Connecting rod의 重量 W_c 를 二分하여 往復運動 部分과 廻轉運動 部分에 添加해 버리면 Connecting rod는 없어질 것과 같고 그 換算된 往復運動部의 무게 W_r' 는 다음과 같다.

$$W_r' = W_p + \frac{l_1}{l} W_c \quad \text{.....(1)}$$

(註 1)

이렇게 하면 Connecting rod 兩端에서 Piston과 Crank에 作用하는 힘은 (Hinge部의 摩擦半徑이 rod의 길이에 比하여 매우 작고 또 Hinge部의 Clearance도 大端히 작으므로) rod의 中心線上에 힘의 作用線이 있고 이 힘은 兩端에서 크기가 같고 向이 反對인 힘으로 看做된다. 즉 이것은 피스톤의 Piston pin과 Crankpin 間을 무게가 없는 剛體로 連結한 것과 同一하다.

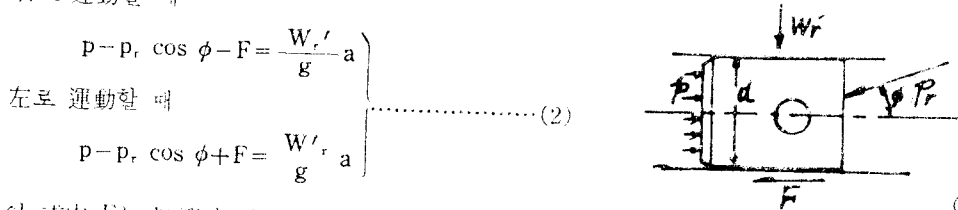
往復運動部가 水平方向으로 運動하는데에 미치는 諸 힘을 考慮하면 運動方程式 (2)가 成立한다.

右로 運動할 때

$$p - p_r \cos \phi - F = \frac{W_r'}{g} a$$

左로 運動할 때

$$p - p_r \cos \phi + F = \frac{W_r'}{g} a$$



(第 2 圖)

이 式中 F는 摩擦에 의한 抵抗力이고 이것은 Connecting rod의 反力의 垂直成分 往復重量 및 Piston Ring이 실린더를 壓搾하는 힘에 의한 摩擦力의 合으로 봐 지므로

$$F = \mu_1 [\pi a p_R + (W_r' + p_r \sin \phi)] \quad \text{.....(3)}$$

(2)와 (3)式에서 p_r 를 구하는데 $W_r' + p_r \sin \phi$ 의 부호가 바뀌질 때가 있으므로 그 點을 考慮하여 p_r 를 求한다. 이것은 부호에 따라 실린더와 피스톤과의 接觸面이 上으로 變하기 때문이다.

(1) 피스톤이 左에서 右로 移動할 때,

(4)

항상 $\sin \phi > 0$ 이고

① $p_r > 0$ 이고 (第2圖의 方向) $W_r' + p_r \sin \phi \geq 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-a)$$

② $p_r < 0$ $W_r' + p_r \sin \phi > 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-a)$$

③ $p_r < 0$, $W_r' + p_r \sin \phi < 0$ 이면

$$p_r = \frac{p - \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-b)$$

(ii) 피스톤이 右에서 左로 移動할 때

이 때는 항상 $\sin \phi < 0$

① $p_r > 0$ $W_r' + p_r \sin \phi > 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-c)$$

② $p_r > 0$ $W_r' + p_r \sin \phi < 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R - W_r' \left(\mu_1 + \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi + \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-d)$$

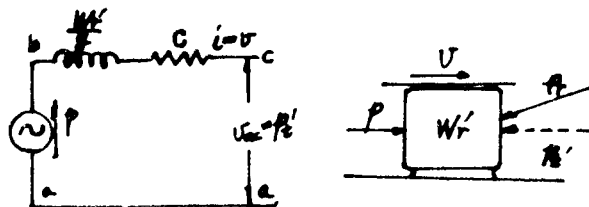
③ $p_r < 0$ $W_r' + p_r \sin \phi \geq 0$

$$p_r = \frac{p + \mu_1 \pi d p_R + W_r' \left(\mu_1 - \frac{a}{g} \right)}{\cos \phi - \mu_1 \sin \phi} \dots \dots \dots (4-e)$$

換算된 往復運動部分에 關한 運動式中 F의 誘導過程에서 乾性抵抗만이 있는 것으로 假定하였다. 實은 이 外에도 많은 複雜한 抵抗力이 포함되고 있음을 알고 있으나 絕對의 影響을 미치는 것은 乾性抵抗이다. 더욱이나 實엔진에서는 充分한 潤滑로 두꺼운 潤滑膜이 形成되어 있으므로 完全한 乾性抵抗만으로는 볼 수 없는 것이다. 그렇다고 해서 抵抗力이 速度에 比例한 粘性抵抗力으로도 볼 수 없지만 어느 쪽이라고 봐도 어느 期間 抵抗力으로 잃게 되는 損失에 넣지는 서로 同一해야 하고 乾性抵抗을 等價한 線型粘性 抵抗으로 바꾸면 매우 近似한 線型振動 特性으로 解析할 수 있으므로 (註2) 이렇게 하기 위하여 다음과 같은 式을 세우기로 하였다.

$$c \int v ds = \int F ds + \int \cos(\tan^{-1} \mu_2) |P_r| \frac{d_w}{2} d\phi \dots \dots \dots (5)$$

이 式은 粘性抵抗으로 어느 期間(1사이클) 잃게 되는 損失은 乾性抵抗 F와 Piston pin에 서 乾性抵抗으로 잃게 되는 損失과 같다는 理論에서 세워진 것이다.



(第3圖)

(5)식의 c를 구하려는는 既知函數의 形으로 積分이 不可能한지라도 v, a, p, p', 와 F의 瞬間值를 구하여 c를 數值積分으로 求할 수 있다.

이런방 식의 $\frac{W'}{g}$ 와 c를 求했으므로 이것들을 電氣回路에서의 印덕턴스와 抵抗으로 對應한다.

電壓——인간 Analogue에서 第3圖처럼 電氣的 等價回路가 示한 往復部分만 그려진다. 즉 a, c간의 電位差는 Connecting rod를 通하여 Crank에 傳達되는 水平力 p'가 된다. 이것은 마치 電氣回路의 漏洩 電력터스와 抵抗에의 한 電壓降下를 減할 것과 같다.

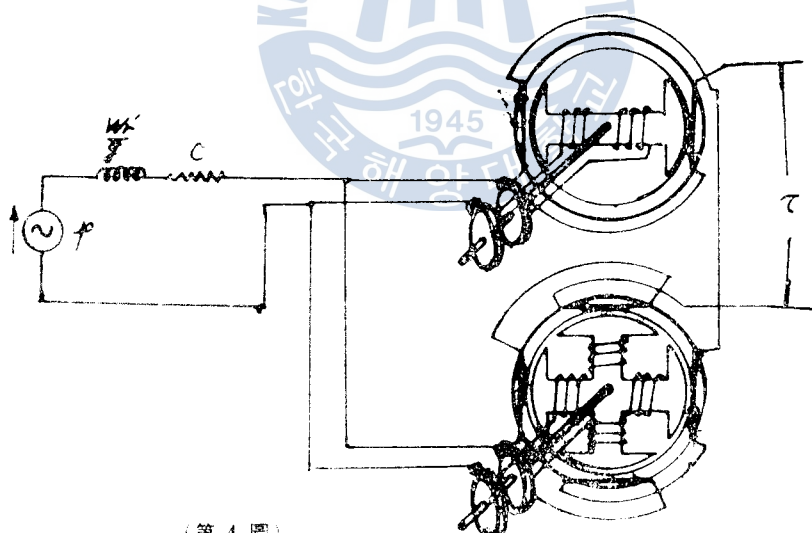
이 水平力 p'의 Crank 廻轉力을 나타내면

$$\tau = p' \cdot r \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} = p' \cdot r \left(\sin \theta + \frac{r}{2} \sin 2\theta \right) \dots \dots \dots (6)$$

(註 3)

(6)식에서 轉力 τ는 p'와 r sinθ + $\frac{r^2}{2}$ sin2θ의 積으로 表되고 廻轉力을 電壓으로 換算하는 Analogue 系에서는 다음과 같은 正弦波 發電機로 解析할 수 있다.

이 轉力에 同一한 角速度 (ω)로 廻轉시키고 同一軸에 2極과 4極을 가진 發電機에 p'에 比例한 勵磁電流로 磁極을 勵磁시켜 준다. (極數에 따라 ω는 바꿀 수 있다) 磁極의 모양과 固定子의 配列法을 正確한 正弦波電壓이 誘起하도록 되어 있다고 보면 誘起起電力의 크기는 p'의 單位電壓에 對하여 最大値가 r volt가 되도록 設計된 二極捲線과 最大値가 $\frac{r^2}{2}$ volt가 되도록 設計된 四極捲線을 달아서 두모 이 두 捲線에서의 誘起起電力의 合의 廻轉力을 나타내는 電壓의 形이다.



(第 4 圖)

廻轉力에 必要한 慣性은 Crank pin, 두개의 Crank arm, 主軸, Balance Weight 그리고 Connecting rod의 廻轉部軸에 對한 合의 ertia 矩(廻轉部軸에 對한 慣性 모멘트)이다.

$$W_1 = W_1 + \frac{1}{2} W_2 \dots \dots \dots (7)$$

註 4. 廻轉重最은 半徑 r인 Crank pin의 位置로 假設하여 求한 것으로 함.
 이 두개의 廻轉輪에 對한 極慣性 모멘트 J은



$$J_1 = \frac{1}{g} [W_c + \frac{\ell_1}{\ell} W_l] r^2 = \frac{W_c'}{g} r^2 \dots\dots\dots(8)$$

Crank pin이 받는 힘은 p_r 와 Connecting rod의 廻轉運動部分으로 換算된 重量과 또 이 重量이 廻轉으로 받게 되는 遠心力의 세 種이다. 또 Pin과 Bush 간의 Clearance는 적고 相對廻轉角은 $\theta + \varphi$ 가 되지만 一行程中 $\pm \varphi$ 로 相殺되어서 結局 π 가 되므로 相對廻轉角을 θ 로 보면 Crank pin에서 잃게 되는 일 T_1 은

$$T_1 = \frac{1}{2} \cos(\tan^{-1} \mu_2) \mu_2 d_c \int \sqrt{(p_r \cos \phi - \frac{\ell_1}{\ell g} W_l r \omega^2 \cos \theta)^2 + (p_r \sin \phi + \frac{\ell_1}{\ell g} W_l r \omega^2 \sin \theta)^2} d\theta \dots\dots\dots(9)$$

Main Bearing에서는 廻轉部의 全重量 W_0 (Connecting rod의 廻轉部의 重量도 包含)의 廻轉에 의한 遠心力과 Connecting rod에서 傳來한 힘을 받으므로 앞의 方法에 따라 廻轉으로 因해서 잃게 되는 일 T_2 를

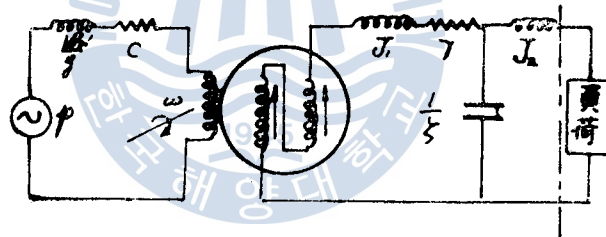
$$T_2 = \frac{1}{2} \cos(\tan^{-1} \mu_2) \mu_2 d_s \int \sqrt{(W_0 - \frac{W_0}{g} r_0 \omega^2 \sin \theta - p_r \sin \phi)^2 + (p_r \cos \phi - \frac{W_0}{g} r_0 \omega^2 \cos \theta)^2} d\theta \dots\dots\dots(10)$$

따라서 全廻轉摩擦損은

$$\int \omega d\theta = T_1 + T_2 \quad \gamma = \frac{T_1 + T_2}{\int \omega d\theta} \dots\dots\dots(11)$$

로 된다.

Crank pin과 Flgwheel 사이의 軸과 Crank arm의 비틀림 彈性係數 ζ 까지 計算된다면 이것을 廻轉 Compliance로 바꾸고 (註 5) Fly-wheel까지 綜合한 等價回路는 第5圖와 같다.



(第 5 圖)

IV. 適 用

美國 Briggs and Stratton Corporation에서 製作된 空氣壓縮機 驅動用 小型 Gasoline 엔진에 對하여 適用시켜 보기로 하였다. (크랭크軸의 치수는 第8圖 參照) 이 엔진을 分解하여 얻을수 있는 치수는 다음과 같다.

$W_p = 1.74 \text{ lb}$

$W_l = 2 \text{ lb}$

$W_0 = 75.5 \text{ lb}$ (Crank pin, Crank arm, Balance Weight, gear, 軸의 무게 및 Flywheel의 무게)

$d = 3.5''$

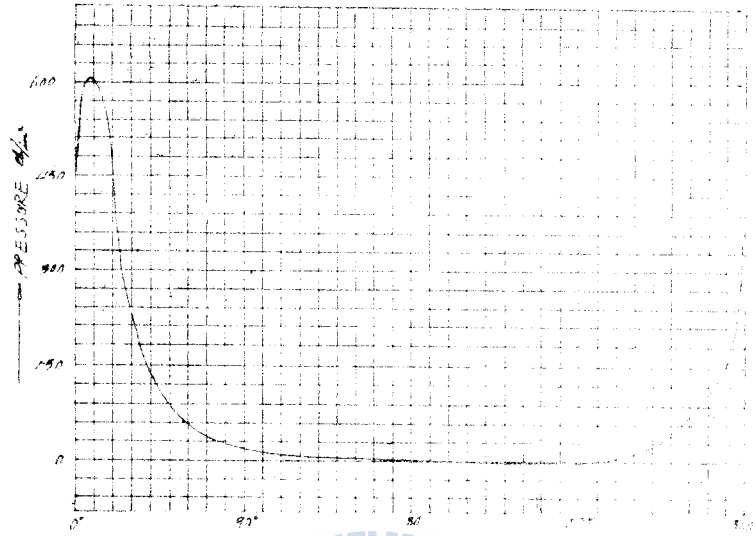
$d_s = 1.593''$

$d_w = 0.812''$

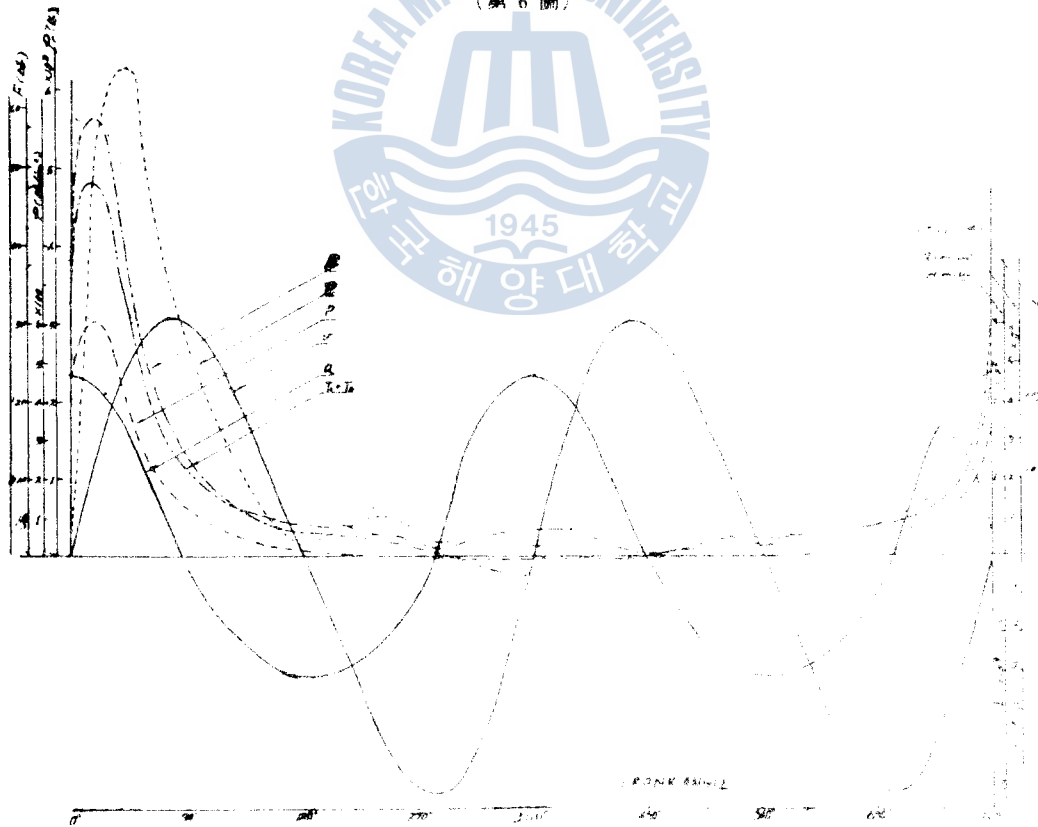
$d_c = 1.359''$

$r = 2.375''$

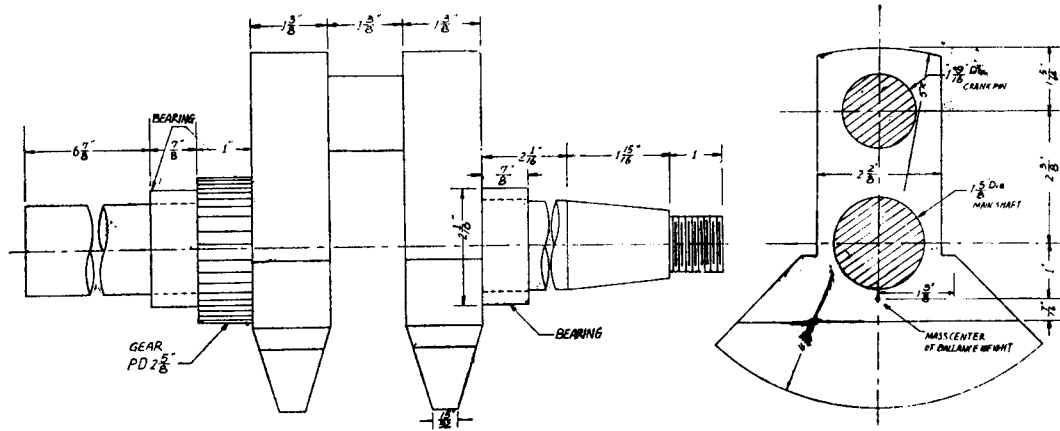
$\ell = 9.938''$



CRACK ANGLE
(第 6 圖)



(第 7 圖)

CRANK SHAFT $S=1/1$ 

(第 8 圖)

$$l_1 = 8.665''$$

$$l_2 = 1.273''$$

Fly wheel의 무게 57.6 lb

$$q = 0.2381$$

가스의 폭발壓力은 第6圖와 같고

$$\omega = 1200 \text{ r. p. m}$$

(1)式에 의하여 W_r' 는

$$W_r' = W_p + \frac{l_2}{l} W_s = 1.996 \text{ lb}$$

$$\frac{W_r'}{g} = \frac{1.996}{32.2 \times 12} = 5.164 \times 10^{-3} \text{ lb sec}^2/\text{in} = 0.094 \text{ kg sec}^2/\text{m} \text{ [Henry]}$$

c는 第7圖의 F曲線의 變位에 對한 積分의 合으로 구하고 이 때의 摩擦係數는 0.005 (註 6)로 假定하였다.

F의 계산에 πdp_R 즉 Piston Ring全體가 氣筒을 압축하는 힘은

Piston Ring이 이 엔진에서는 $\frac{3}{16}$ ''의 것이 3개 있었고 Ring의 壓力을 0.324 kg/cm^2 (註 7)로 假定하면 $\pi dp_R = 28.45 \text{ lb}$ 를 얻었다.

c의 값은 (5)式에 따라

$$c = \frac{104.3 + 64.2}{189.7 \times 4 \times 2.375} = 0.935 \text{ lb sec/in} = 1.681 \text{ kg sec/m} \text{ [ohm]}$$

이것으로 第5圖의 發電機, 勵磁, 回路의 抵抗과 인덕턴스를 구했다. 電壓 (p)中 저항과 인덕턴스에 의한 電壓降下를 減한 電壓 (p_r')에 比例한 勵磁電流로 起電力이 誘起되고 이 回路部分의 인덕턴스는 廻轉部의 極慣性 모멘트와 같으므로 이 엔진의 크랭크 축에 關한 값을 計算하여 Connecting rod의 廻轉部 것까지 合하면 된다.

$$J_1 = \frac{W_c}{g} r^2 + \frac{W_s}{g} \times \frac{l_1}{l} r^2 = 0.21182 + 0.026 + 0.23782 \text{ lb in sec}^2$$

$$= 0.002731 \text{ kg m sec}^2 \text{ [henry]}$$

(9) (10) (11)式에 따라 γ 를 구하는데

까운 結果를 얻을 수 있다.

實機關은 Piston-Crank mechanism 以外도 Cam, Gear, Valve 등이 있고 이것들까지도 對象으로 하여 等價電氣回路로 換算한다면 엔진全體를 電氣回路로 換算할 수 있지만 그의 實踐에 있어서는 실린더內에서 일어나고 있는 Gas 壓力과 對應하는 波形을 發生시킬 發電機 (波形發生裝置)의 製作을 비롯하여 Valve 動作과 Gam 動作의 換算 等の 難問題가 남아 있다.

VI. 註

- 註 1. Theory of machine Joseph Edward Shigley p-539
- 註 2. 機械力學 II卷, 谷口 修 p-37 參照
- 註 3. 中村行三 機械力學 p-11 參照
- 註 4. 中村行三 機械力學 p-27 "
- 註 5. 中村行三 機械力學 p-106 "
- 註 6. 機械設計 鄭性模 p-290 "
- 註 7. 機關科 提要 中卷 古川 外 2名 p-197 參照
- 註 8. Timosenko 工業振動 p-189 "
- 註 9. 中村行三 機械力學 p-9 參照

VII. 一般參考文獻

- ① 機械力學 中村行三 關谷壯 いすみ書房 1961.
- ② Mechanical Vibration by W. J. Thomson Prentice Hall 1953.
- ③ 機械力學 II卷 谷口 修 養賢堂 1954.
- ④ Theory of machine Joseph Edward Sligley Mc-Graw Hill 1961.
- ⑤ 機械の研究 Vol-19 No. 3~No. 6 中の 機械回路の記號解析 中田 考 1967.
- ⑥ 非線形振動 杉山昌平 廣川書店 1965.