

다구찌 실험계획의 구성원리에 관한 연구

엄봉진* · 이병윤** · 고선우* · 김재환***

1. 서 론

최근 많은 관심의 대상이 되고 있는 다구찌 방법의 핵심은 파라미터 설계(Parameter Design)라 할 수 있으며, 그 기본 원리는 생산된 제품의 성능특성(또는 품질특성)이 사용 환경의 변화, 부품의 노후화, 불안전 제조 등의 잡음(noise)에 둔감하도록 제품이나 공정을 설계 또는 개선하자는 것이다. 여기서 둔감하다는 의미는 성능특성이 잡음의 영향으로 말미암아 목표치(또는 이상치)를 유지하지 못하고 변동하는 정도가 작음을 의미한다. 이와 같은 이유로 일부에서는 파라미터 설계를 로바스트 설계(Robust Design)라고도 부른다.

제품의 품질 향상을 위한, 또는 잡음에 대해 로바스트한 제품을 만들기 위한 다구찌의 전략은 그로부터 비롯된 새로운 개념이라기 보다는 오랫동안 많은 공학자 또는 과학자들에 의해 추구되어 온 목표라 할 수 있다. 다만, 다구찌의 공헌은 위와 같은 전략을 수행하기 위한 구체적인 방법을 마련하였다는 것과, 그 방법을 여러 분야에 적용하여 그 효용성을 입증한데 있다고 여겨진다.

다구찌는 파라미터 설계를 통해 제품이나 공정의 최적 조건을 결정함에 있어, 소위 직교배열을 이용한 데이터의 수집과 SN 비(signal-to-noise ratio)를 특성치로 한 분석방법을 제안하고 있다. 그러나 다구찌가 제안한 직교배열이 어떤 원리에 의해 구성되었는가에 관해서는 비록 다구찌(1987)에 부분적으로 설명이 되어 있으나 충분하지 못한 실정이다. 본 논문의 목적은 다구찌에 의해 거의 모든 경우에 사용되고 있는 직교배열은 전통적으로 잘 알려진 직교주효과계획의 일종이라는 사실로부터 그 구성원리를 밝히는 데 있으며, 이를 통하여 앞으로 보다 적절한 활용방법과 개선된 실험계획을 마련하는 데 도움이 되었으면 한다.

* 서울 동대문구 청량리 사서함 150 한국과학기술원 · 산업공학과

** 경남 울산시 울산우체국 사서함 4 주식회사 유공 · 제어부

*** 한국해양대학교 응용수학과

2. 직교주효과계획

다구찌가 제안하고 있는 직교배열은 두 문자 'L'로 시작하고 있으며, $L_N(s^k)$ 또는 $L_N(s_1^{k_1} \times s_2^{k_2})$ 등으로 불리운다. 전자는 1부터 s 까지의 정수로 이루어진 $N \times k$ 행렬의 형태를, 후자는 k_1 개의 열은 1부터 s_1 까지 k_2 개의 열은 1부터 s_2 까지의 정수로 이루어진 $N \times (k_1 + k_2)$ 행렬의 형태를 취하고 있다. 여기서 N 은 총 실험횟수(또는 행의 수), k, k_1, k_2 는 최대 수용할 수 있는 인자의 수(또는 열의 수), s, s_1, s_2 는 해당되는 인자의 수준수를 의미한다. 따라서 $L_N(s_1^{k_1} \times s_2^{k_2})$ 는 수준수가 s_1 인 인자가 최대 k_1 개, 수준수가 s_2 인 인자가 최대 k_2 개까지 존재하는 요인실험(factorial experiment)을 N 회에 수행할 수 있도록 만들어진 직교배열을 의미한다. 특히 $L_N(s^k)$ 는 모든 k 개의 인자가 같은 수준수 s 를 가지므로 동일 수준계라 부르고 $L_N(s_1^{k_1} \times s_2^{k_2})$ 는 혼합 수준계라 부른다. 표 1에 다구찌(1987)에 의해 제안된 직교배열을 수록하였다. 또 표 2에는 다구찌 직교배열중 $L_8(2^7)$ 을 제시하였다.

다구찌가 제안하고 있는 직교배열은 전통적으로 직교주효과계획(Orthogonal Main Effect Plan)이라 불리우는 일부 요인계획(Fractional Factorial Design)의 일종이다. 직교주효과 계획이란 2인자 이상의 교호작용이 존재하지 않는다는 가정 아래 모든 주효과를 서로 상관 관계 없이 추정가능케하는 실험계획으로서 Resolution III 계획이 된다(Dey, 1985).

어떤 실험계획이 직교주효과계획이 되기 위한 필요 충분조건은 한 인자의 각 수준에서 다른 인자의 각 수준이 나타나는 빈도가 비례적으로 표현될 수 있어야 한다는 것이며, 이를 비례빈도조건(condition of proportional frequencies)이 부른다(Day, 1985). 이 관계를 수식으로 표현하면 다음과 같다. 만약 인자 A 가 p 수준, 인자 B 가 q 수준을 가질 때, 다음 식 (1)을 만족하면 된다.

$$n_{ij} = n_i \cdot n_j / N, \quad i=1, 2, \dots, p; \quad j=1, 2, \dots, q$$

(1)

식 (1)에서 n_{ij} 는 인자 A 의 수준이 i 이고 인자 B 의 수준이 j 인 실험회수를 의미하고, n_i 는 인자 A 의 수준이 i 인 실험횟수를, n_j 는 인자 B 의 수준이 j 인 실험횟수를 의미하며, N 은 전체 실험횟수를 의미한다. 예를 들어 표 2의 $L_8(2^7)$ 에서 임의로 4열과 7열을 선택하여 인자 A 를 4열에 B 를 7열에 할당하였다고 하면, $n_{1.} = n_{2.} = 4$, $n_{.1} = n_{.2} = 4$, $n_{11} = n_{12} = n_{21} = n_{22} = 2$, $N=8$ 이므로 모든 i, j 에 대해 식(1)이 만족됨

을 알 수 있으며 다른 임의의 두 열에 대해서도 위의 관계가 성립하므로 $L_8(2^7)$ 은 직교주효과계획이다.

다구찌의 직교배열은 직교주효과계획의 일종이므로 본 논문에서는 후자의 구성원리 중 전자와 긴밀한 관계가 있는 것들에 대해 동일 수준계와 혼합 수준계로 나누어 살펴보고자 한다. 앞으로 직교주효과계획은 $(s^k|N)$ 또는 $(s_1^{k_1} \times s_2^{k_2}|N)$ 등으로 나타내기로 한다.

표 1. 다구찌의 직교배열

수 수준 계		직 교 배 열	구 성 원 리
동 일 수 준 계	2 수준계	$L_4(2^3)$	H-행렬, MOLS, $(s^m s^n)$
		$L_8(2^7)$	H-행렬, $(s^m s^n)$
		$L_{12}(2^{11})$	H-행렬
		$L_{16}(2^{15})$	H-행렬, $(s^m s^n)$
		$L_{32}(2^{31})$	H-행렬, $(s^m s^n)$
		$L_{64}(2^{63})$	H-행렬, $(s^m s^n)$
	3 수준계	$L_9(3^4)$	MOLS, $(s^m s^n)$
		$L_{18}(3^7)$	$(s^m 2s^n)$
		$L_{27}(3^{13})$	$(s^m s^n)$
		$L_{54}(3^{25})$	$(s^m 2s^n)$
		$L_{81}(3^{40})$	$(s^m s^n)$
	4 수준계	$L_{16}(4^5)$	MOLS, $(s^m s^n)$, Replacement
		$L_{32}(4^9)$	$(s^m 2s^n)$
		$L_{64}(4^{21})$	$(s^m s^n)$, Replacement
	5 수준계	$L_{25}(5^6)$	MOLS, $(s^m s^n)$
		$L_{50}(5^{11})$	$(s^m 2s^n)$
	혼 합 수 준 계	$L_{18}(2 \times 3^7)$	분해가능배열
		$L_{36}(2^3 \times 3^{13})$	OA(36, 12×3^{12} , 2)
$L_{36}(2^{11} \times 3^{12})$		OA(36, 12×3^{12} , 2)	
$L_{54}(2 \times 3^{25})$		분해가능배열	
$L_{32}(2 \times 4^9)$		분해가능배열	
$L_{50}(2 \times 5^{11})$		분해가능배열	

표 2. 직교배열 $L_8(2^7)$

실험 \ 열	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

3. 동일수준 직교주효과계획의 구성

동일수준의 직교주효과계획을 구성하는 방법으로는 Hadamard 행렬을 이용하는 방법, 서로 직교하는 라틴 방격을 이용하는 방법, s^n 의 실험횟수로 s^m 에 대한 직교주효과계획을 구성하는 방법, $2s^n$ 의 실험횟수로 s^m 에 대한 직교주효과계획을 구성하는 방법, 비례 빈도조건에 근거를 둔 Collapsing과 Replacement 등이 있다. 여기서는 다구찌의 동일 수준계 직교배열이 이들 방법에 의해 어떻게 구성될 수 있는가를 살펴보고자 한다.

3.1 Hadamard 행렬을 이용한 방법

Hadamard 행렬(H-행렬)은 2-수준계 직교주효과계획을 구성하는데 가장 보편적으로 쓰인다. 먼저 H-행렬을 정의하면 다음과 같다.

H_n 을 +1과 -1로 구성된 $N \times N$ 행렬이라 하자. H_n 이 다음 조건을 만족하면

H_n 을 크기가 N 인 H-행렬이라 부른다.

$$H_N' H_N = H_N H_N' = N I_N.$$

H-행렬이 존재하기 위한 필요조건은 N 이 1, 2, 또는 4의 배수가 되어야 한다는 것이다. 그리고 어떤 H-행렬에서 행끼리 위치를 바꾸거나, 열끼리 위치를 바꾸거나, 또는 행이나 열의 부호를 반대로 하여 얻은 행렬도 원래의 H-행렬과 대등하다. 특히 첫 열이 모두 +1로 구성된 H-행렬을 seminormal form이라고 부른다. 그리고 두 개의 H-행렬 H_M 과 H_N 을 Kronecker 곱셈하여 얻은 새로운 행렬 H_{MN} 은 역시 H-행렬이 된다

는 것이 알려져 있다(Raghavarao, 1971).

크기가 N 인 H -행렬 H_N 을 seminormal form으로 구하였을 때 첫 열을 제외한 나머지 $N \times (N-1)$ 행렬은 N 회의 실험으로 $(N-1)$ 개까지의 인자를 수용할 수 있는 2-수준계 직교주효과계획($2^{n-1}|N$)이 된다(Dey, 1985). 따라서 2-수준계 직교주효과계획을 구성하는 문제는 결국 해당되는 H -행렬을 구하는 문제로 귀결된다. 예를 들어 직교주효과계획($2^7|8$)을 구해보자. 먼저 H_8 을 구해야 하는데 이를 Kronecker 곱셈으로 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 H_8 &= H_2 \otimes H_4 \\
 &= H_2 \otimes H_2 \otimes H_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

위의 H_8 은 이미 seminormal form으로 되어 있으므로 첫 열을 제외한 나머지가 직교주효과계획($2^7|8$)이 된다. 이를 표 2에 나타나 있는 다구찌의 $L_8(2^7)$ 과 비교하면 일견 다르 보이지만 H_8 에서 첫 열을 제외하고 모든 -1을 2로 바꾼 다음 열의 순서를 재조정하면 $L_8(2^7)$ 과 동일하게 됨을 알 수 있다. 표 1에 나타나 있는 다구찌의 2-수준계 직교배열은 모두 H -행렬을 이용하여 위와 유사한 방법으로 구할 수 있음을 보일 수 있다. 다구찌는 실험횟수 N 이 20, 24, 28, 36, 40, 44, \dots , 60, 68, 72, \dots 인 2-수준계 직교배열에 대해서는 언급하고 있지 않으나, 이들은 Plackett과 Burman (1946)의 방법을 이용하여 구성할 수 있다.

3.2 라틴 방격에 의한 직교주효과계획

크기가 s 인 라틴 방격이란 s 개의 symbol이 있을 때 각 symbol이 각 행과 각 열에 오직 한번씩 나타나도록 배열해 놓은 것을 말한다. 예를 들어, 그림 1의 방격 (1),

(2), 또는 (3)은 크기가 4인 라틴 방격이다. 크기가 같은 2개의 라틴 방격을 중첩하였을 때 각 라틴 방격의 symbol로 만들어지는 순서쌍(ordered pair)이 한 번씩만 나타나면 두 라틴 방격은 서로 직교한다고 말한다. 예를 들어 그림 1에서 라틴 방격 (1)과 (2)를 중첩하면 그림 2와 같이 되며, symbol의 순서쌍이 오직 한 번씩만 나타나므로 (1)과 (2)는 서로 직교하는 라틴 방격(MOLS, Mutually Orthogonal Latin Squares)이다. 그림 1에서 (1)과 (3), (2)와 (3)도 역시 같은 성질을 갖는 MOLS이다. 주어진 s 에서 MOLS는 최대 $(s-1)$ 개까지 존재할 수 있으며, 특히 s 가 소수(prime number) 또는 소수의 지수승(prime power)일 때 MOLS의 수는 최대값이 $(s-1)$ 이 된다는 사실이 알려져 있다(Reghavarao, 1971). 이 때 $(s-1)$ 개의 MOLS의 집합을 MOLS의 완전집합이라고 부른다. 그림 1에서 $s=4$ 이므로 s 는 소수의 지수승이 되며, 따라서 MOLS의 수는 $s-1=3$ 이고 $\{(1), (2), (3)\}$ 은 MOLS의 완전집합이 된다.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

그림 1. 서로 직교하는 라틴 방격

1,1	2,2	3,3	4,4
2,3	1,4	4,1	3,2
3,4	4,3	1,2	2,1
4,2	3,1	2,4	1,3

그림 2. 두 라틴 방격 (1), (2)의 중첩

MOLS의 완전집합을 이용하면 직교주효과계획($s^{s+1}|s^2$)을 구성할 수 있다. 그 방법은 먼저 완전집합에 속해 있는 모든 라틴 방격을 중첩하여 하나의 방격을 만들고, 이 방격의 행과 열에 1부터 s 까지의 번호를 부여한다. 중첩된 방격에는 s^2 개의 cell이 있으며, 각 cell에는 중첩된 symbol들이 순서대로 나열되어 있다. 다음 각 cell

의 행 번호, 열번호, 중첩된 symbol들을 하나의 행 벡터로 하여 순서대로 늘어 놓으면 원하는 직교주효과계획을 얻을 수 있다. 예를 들어 직교주효과계획(4⁵|16)을 구해보자. 그림 1의 완전집합을 중첩하면 그림 3과 같이 되고 이를 정리하면 표 3의 (4⁵|16)을 얻게 된다.

다구찌의 직교배열 중 $L_4(2^3)$, $L_9(3^4)$, $L_{16}(4^5)$, $L_{25}(5^6)$ 등은 위와 같이 MOLS의 완전집합을 이용하여 구성할 수 있다.

	1	2	3	4
1	1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4
2	2,3,4	1,4,3	4,1,2	3,2,1
3	3,4,2	4,3,1	1,2,4	2,1,3
4	4,2,3	3,1,4	2,4,1	1,3,2

그림 3. MOLS의 완전집합의 중첩

표 3. 직교주효과계획(4⁵|16)

실험	열				
	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

3.3 직교주효과계획 ($s^m | s^n$)

s 가 소수 또는 소수의 지수승일 때, S^m 번의 실험횟수로 S^m 에 대한 직교주효과계획을 구성할 수 있다. 단 $m=(s^n-1)/(s-1)$ 이고 n 은 양의 정수이다. 예를 들어 $s=4=2^2$ 이고 $n=2$ 이면 $m=5$ 가 되므로 16회의 실험으로 4^5 에 대한 직교주효과계획을 구성할 수 있다.

직교주효과계획 ($s^m | s^n$)에서 m 개의 열(또는 인자)은 다음과 같이 표현할 수도 있다(kempthorne, 1952).

1. n 개의 기본인자에 대한 주효과
2. n 개의 기본인자들 사이에 존재하는 $(m-n)$ 개의 'generalized interaction'

따라서 직교주효과계획 ($s^m | s^n$)은 n 개의 기본인자의 주효과에 대한 열과, 이들의 모든 가능한 합을 Galois Field, $GF(s)$ 에 대하여 구함으로써 구성될 수 있다(Addelman, 1962). 예를 들어 $(4^5 | 16)$ 을 구성해 보자. 먼저 $GF(4=2^2)$ 의 원소를 u_0, u_1, u_2, u_3 라 정의하고 덧셈과 곱셈표를 구성하면 표 4와 같다. 또한 $n(=2)$ 개의 기본인자를 A, B 라 하고 나머지 $(m-n)=3$ 개의 인자를 C, D, E 라고 하면 덧셈과 곱셈표를 이용하여 표 5와 같은 결과를 얻는다. 예를 들어 실험번호 7의 D 열이 u_0 가 되는 것은 $u_B + u_2u_A = u_2 + u_2u_1 = u_2 + u_2 = u_0$ 가 되기 때문이다. 표 5에서 모든 u 를 제거한 후 첨자 0은 1로, 1은 2로, 2는 3으로, 3은 4로 바꾸어 주면 3.2절에서 라틴 방격을 이용하여 구한 $(4^5 | 16)$ 과 동일함을 알 수 있다. 이와 같은 방법을 이용하여 구성될 수 있는 다구찌의 직교배열을 표 6에 수록하였다.

표 4. $GF(2^2)$ 의 덧셈표와 곱셈표

	u_0	u_1	u_2	u_3
u_0	u_0	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_0	u_3	u_2
u_2	u_2	u_3	u_0	u_1
u_3	u_3	u_2	u_1	u_0

(덧셈표)

	u_0	u_1	u_2	u_3
u_0	u_0	u_0	u_0	u_0
u_1	u_0	u_1	u_2	u_3
u_2	u_0	u_2	u_3	u_1
u_3	u_0	u_3	u_1	u_2

(곱셈표)

표 5. 직교주효과계획 (4⁵|16)의 구성

실험 일	A (u _A)	B (u _B)	C (u _B +u ₁ u _A)	D (u _B +u ₂ u _A)	E (u _B +u ₃ u _A)
1	u ₀	u ₀	u ₀	u ₀	u ₀
2	u ₀	u ₁	u ₁	u ₁	u ₁
3	u ₀	u ₂	u ₂	u ₂	u ₂
4	u ₀	u ₃	u ₃	u ₃	u ₃
5	u ₁	u ₀	u ₁	u ₂	u ₃
6	u ₁	u ₁	u ₀	u ₃	u ₂
7	u ₁	u ₂	u ₃	u ₀	u ₁
8	u ₁	u ₃	u ₂	u ₁	u ₀
9	u ₂	u ₀	u ₂	u ₃	u ₁
10	u ₂	u ₁	u ₃	u ₂	u ₀
11	u ₂	u ₂	u ₀	u ₁	u ₃
12	u ₂	u ₃	u ₁	u ₀	u ₂
13	u ₃	u ₀	u ₃	u ₁	u ₂
14	u ₃	u ₁	u ₂	u ₀	u ₃
15	u ₃	u ₂	u ₁	u ₃	u ₀
16	u ₃	u ₃	u ₀	u ₂	u ₁

표 6. $(s^m | s^n)$ 형태의 다구찌 직교배열

s (수준수)	n	m	s^n (실험횟수)	다구찌 직교배열
2	2	3	4	$L_4(2^3)$
	3	7	8	$L_8(2^7)$
	4	15	16	$L_{16}(2^{15})$
	5	31	32	$L_{32}(2^{31})$
	6	63	64	$L_{64}(2^{63})$
3	2	4	9	$L_9(3^4)$
	3	13	27	$L_{27}(3^{13})$
	4	40	81	$L_{81}(3^{40})$
4	2	5	16	$L_{16}(4^5)$
	3	21	64	$L_{64}(4^{21})$
5	2	6	25	$L_{25}(5^6)$

3.4 직교주효과계획 $(s^m | 2s^n)$

Addelman과 kempthorne(1961)은 $2s^n$ 의 실험횟수로 s^m 에 대한 직교주효과계획을 구성하는 방법을 제안하였다. 단, $m=2(s^n-1)/(s-1)-1$ 이고 n 은 양의 정수이다. 이 방법 역시 Galois Field 이론에 근거하고 있으며 자세한 내용은 Addelman과 kempthorne (1961)의 논문을 참조하기 바란다. 표 7에 이 방법에 의해 구성될 수 있는 다구찌 직교배열을 수록하였다.

표 7. $(s^m | 2s^n)$ 형태의 다구찌 직교배열

s (수준수)	n	m	$2s^n$ (실험횟수)	다구찌 직교배열
3	2	7	18	$L_{18}(3^7)$
	3	25	54	$L_{54}(3^{25})$
4	2	9	32	$L_{32}(4^9)$
5	2	11	50	$L_{50}(5^{11})$

위의 직교주효과계획 중 $(3^7 | 18)$ 또는 $L_{18}(3^7)$ 을 표 8에 나타내었다.

표 8. 직교주효과계획 ($3^7|18$) 또는 $L_{18}(3^7)$

실험 번	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	2	1	1	2	2	3	3
5	2	2	2	3	3	1	1
6	2	3	3	1	1	2	2
7	3	1	2	1	3	2	3
8	3	2	3	2	1	3	1
9	3	3	1	3	2	1	2
10	1	1	3	3	2	2	1
11	1	2	1	1	3	3	2
12	1	3	2	2	1	1	3
13	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	3	1	2	1	3
15	2	3	1	2	3	2	1
16	3	1	3	2	3	1	2
17	3	2	1	3	1	2	3
18	3	3	2	1	2	3	1

3.5 Collapsing과 Replacement

제 2 장에서 언급한 비례 빈도조건에 근거하여 많은 수준수를 갖는 인자들에 관한

직교주효과계획으로부터 적은 수준수를 갖는 인자들에 관한 직교주효과계획을 Collapsing을 통해 구성할 수 있다. 이를 위해 수준들간의 대응관계(correspondence scheme)를 설정할 필요가 있는데 그림 4에 그 몇 가지 예를 나타내었다.

3-수준 인자의 수준	2-수준 인자의 수준	4-수준 인자의 수준	3-수준 인자의 수준	5-수준 인자의 수준	3-수준 인자의 수준
1	→ 1	1	→ 1	1	→ 1
2	→ 2	2	→ 2	2	→ 2
3	→ 1	3	→ 3	3	→ 3
		4	→ 2	4	→ 3
				5	→ 1

그림 4. 수준간의 대응관계의 예

수준들간의 대응관계는 어느 한 가지만 유효한 한 것은 아니며, 어떤 대응관계를 사용하더라도 직교성을 유지할 수 있다. 다만 가장 바람직한 대응관계를 찾는 문제를 생각할 수 있는데, Addelman(1962)은 주효과와의 추정에 있어 상대적 효율(efficiency)을 기준으로 하여 적절한 대응관계를 선택하는 방법을 소개하고 있다.

특수하게 $s_1 = s_2^u$ 이면 (단, u 는 2이상의 양의 정수) s_1 수준을 갖는 하나의 열을 s_2 수준의 $(s_1-1)/(s_2-1)$ 개의 열로 Collapsing 할 수 있다(Addelman, 1962). 예를 들면, $s_1=4$ 이고, $s_2=2$ 이면 $(4-1)/(2-1)=3$ 이므로 4수준의 1개의 열이 2수준의 3개의 열로 Collapsing 된다. 이 관계를 (2)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

예를 들어 직교주효과계획 ($4^5|16$)의 각 열에 대해 (2)와 같이 Collapsing을 시행하면 직교주효과계획 ($2^{15}|16$)을 얻을 수 있다.

Replacement에 의한 방법은 다음의 정리로 설명할 수 있다.

정리 1(Addelman, 1962) s^n 의 실험횟수로 각각 s 개의 수준을 갖는 $(s^n-1)/(s-1)$ 개의 인자에 대한 직교주효과계획을 생각하자(단, s 는 소수 또는 소수의 지수승). 이 때, 적절히 선택된 $(s^m-1)/(s-1)$ 개의 인자 대신에 $t(s^{m-1} < t \leq s^m)$ 개의 수준을 갖는 하나의 인자를 도입하여 새로운 직교주효과계획을 구성할 수 있다.

[증명] $t=s^m$ 이라 하자. 각각 s 개의 수준을 갖는 $(s^m-1)/(s-1)$ 개의 인자에 대해 실험횟수가 s^m 인 직교주효과계획이 존재하므로 $t=s^m$ 개의 수준을 갖는 1개의 인자는 s 개의 수준을 갖는 $(s^m-1)/(s-1)$ 개의 인자를 대치할 수 있다. $s^{m-1} < t < s^m$ 이면 수준의 수가 s^m 인 인자를 t -수준의 인자로 collapsing하면 된다.

대표적인 Replacement에 대한 예는 $t=4, m=2, s=2$ 일 때, (2)에서 우측의 2수준을 갖는 3개의 인자(열)가 좌측의 4수준을 갖는 1개의 인자로 대치되는 것을 들 수 있다. 이와 같은 방법으로 직교주효과계획 ($4^5|16$)을 ($2^{15}|16$)으로부터, 또는 ($4^{21}|64$)을 ($2^{63}|64$)로부터 구성할 수 있다.

4. 혼합수준의 직교주효과계획

인자마다 수준의 수가 동일하지 않고 서로 다른 수준수를 갖는 인자들이 섞여 있는 경우에 대한 직교주효과계획을 구성하는 방법으로는, 동일수준의 직교주효과계획을 이용한 Collapsing과 Replacement 방법이 있고, 그 외에 분해 가능 배열(Resolvable Array)을 이용한 방법, Hadamard 행렬을 이용한 방법 등이 있다. 여기서는 처음 두가지 방법을 중심으로 그 구성원리를 소개하고자 한다.

4.1 Collapsing과 Replacement를 이용한 혼합수준의 직교주효과계획

Addelman(1962)은 동일수준의 직교주효과계획으로부터 Collapsing을 이용하여 혼합수준의 직교주효과계획을 만들 수 있는 상황과 구체적인 절차에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

s_1 이 소수 또는 소수의 지수승이고, $s_1 > s_2 > \dots > s_k$ 일 때, s_1^n 의 실험횟수로써

$s_1^{t_1} \times s_2^{t_2} \times \dots \times s_k^{t_k}$ 에 대한 직교주효과계획을 구성할 수 있다.

단,

$$\sum_{i=1}^k t_i \leq \frac{s_1^n - 1}{s_1 - 1} \quad (3)$$

이다.

(3)의 좌변은 Collapsing한 후의 혼합수준의 인자의 수이고, 우변은 Collapsing하기 전의 동일수준의 인자의 수를 의미한다.

Collapsing을 이용한 혼합수준의 직교주효과계획은 다음과 같이 구성한다.

단계 1. s_1^n 의 실험횟수를 갖는 동일수준의 s_1^m 실험을 구성한다.

이때의 $m = (s_1^n - 1) / (s_1 - 1)$ 이다. (3.3절의 Addelman의 방법과 같다).

단계 2. 단계 1의 m 개의 열중에서 t_2 개의 열에 대해서 s_2 수준으로 Collapsing한다. (Collapsing 방법은 3.5절의 예를 참조)

단계 3. Collapsing 하지 않은 열중에서 t_3 개의 열을 s_3 수준으로 Collapsing한다.

단계 4. 원하는 계획인 $s_1^{t_1} \times s_2^{t_2} \times \dots \times s_k^{t_k}$ 을 얻을 때까지 t_4, \dots, t_k 개의 열에 대해서 단계 3을 반복하여 적용한다.

예를 들어 9회의 실험으로 혼합수준의 직교주효과계획 $3^2 \times 2^2$ 을 구하여 보자 $s_1 = 3$ 이므로 $m = (3^2 - 1) / (3 - 1) = 4$ 이다. 따라서 단계 1에 의해 3^4 에 대한 직교주효과계획을 구성하면 표 9와 같다. 이 실험계획에서 임의로 1열과 2열을 선택한 후 그림 4의 대응관계를 이용하여 Collapsing하면 원하는 혼합수준의 직교주효과계획 ($3^2 \times 2^2 | 9$)를 얻는다.

표 9. 직교주효과계획 (3⁴|9)

실험	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

표 10. 혼합수준의 직교주효과계획 (3² × 2²|9)

실험	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	1	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	1	1	2
7	1	1	3	2
8	1	2	1	3
9	1	1	2	1

Replacement를 이용한 혼합수준의 직교주효과계획의 구성은 3.5절의 정리를 이용하면 된다. 예를 들어, 직교주효과계획 (2⁷|8)로부터 (4 × 2⁴|8)을 구성하려면 표 2의 (2⁷|8)에서 1, 2, 3열을 (2)의 대응관계를 역으로 하여 Replacement하면 된다.

이상 설명한 Collapsing과 Replacement를 통하여 $s_1^{k_1} \times s_2^{k_2}$ 형태의 실험에 대한 다양한 종류의 직교주효과계획을 구성할 수 있다. 다구찌 (1987)는 그의 기본계획에 이들을 모두 포함시키고 있지는 않지만 소위 의수준법과 다수준 작성법이라는 명칭으로 Collapsing과 Replacement에 대해 소개하고 있다.

4.2 직교배열을 이용한 혼합수준의 직교주효과계획

Rao(1946)에 의해 그 개념이 정립된 직교배열(OA, Orthogonal Array)은 s 개의 symbol로 이루어진 $N \times K$ 행렬로서 임의로 d 개의 열을 선택하였을 때 가능한 모든 symbol의 조합이 나타나고 또한 같은 횟수로 반복되는 성질을 갖는다. 이를 흔히 OA(N, s^k, d)로 나타내며 d 를 'strength'라 부른다. 하나의 직교배열을 실험의 관점에서 살펴보면 N 은 실험횟수, s 는 수준의 수 k 는 s -수준의 인자의 수(또는 열의 수)로 볼 수 있다. 예를 들어, 표 2에 나타나 있는 직교주효과계획은 $N=8, s=2, k=7, d=2$ 인 OA이다.

위의 동일수준에 대한 OA의 개념을 두 종류의 수준수가 존재하는 경우로 확장하면 다음과 같다. 즉, $N \times (k_1+k_2)$ 인 행렬에서 k_1 개의 열은 $1, 2, \dots, s_1$ 등으로, k_2 개의 열은 $1, 2, \dots, s_2$ 등으로 구성되며, k_1+k_2 개의 열중에서 임의로 d 개의 열을 골랐을 때 가능한 모든 수준조합이 나타나고 같은 횟수로 반복된다면 이 행렬을 strength가 d 인 직교배열이라고 하고 OA($N, s_1^{k_1} \times s_2^{k_2}, d$)로 표시한다. 그런데 선택되는 d 개의 열에 따라서 각 수준조합의 반복 횟수는 달라질 수 있다.

$N \times m$ 행렬 OA(N, s^m, d)을 u 개의 같은 크기의 부행렬(sub-matrices) B_1, B_2, \dots, B_u 로 분할하였을 때, 각 B_k 의 각 열에서 s 개의 수준들이 같은 횟수만큼 나타나면 OA(N, s^m, d)는 분해가능(resolvable)하다고 하며, 분해가능배열(resolvable array)이라고 부른다(Gupta et al., 1982). 각 부행렬 B_k 의 크기는 $s^p \times m, 1 \leq p \leq d$ 이고 $u = N/s^p$ 이다. 그림 5에 이 관계를 나타내었다.

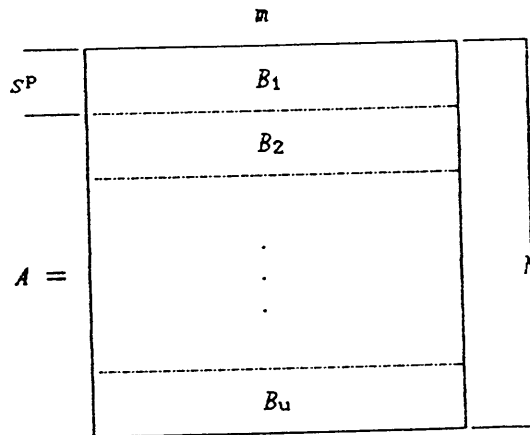


그림 5. 분해가능배열의 구조

그림 5와 같이 u 개의 부행렬로 분해가 가능한 경우에 u 개의 수준을 갖는 열벡터 $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, \dots, u-1, u-1, \dots, u-1)'$ 를 더하여(α 에서 각 수준은 s^p 번 반복된다) 만든 행렬을 B 라고 하면 $B = [A: \alpha]$ 이며 A 는 그림 5의 행렬이고 α 의 각 수준마다 s 개의 모든 수준이 나타나므로 직교성을 만족한다. 결국 B 는 N 번의 실험으로 $u \times s^m$ 실험을 설계한 것이 된다.(Gupta et al., 1982). 분해가능배열을 이용하여 혼합수준의 직교주효과계획을 구성하는 한 가지 방법을 다음에 소개하고자 한다.

Addelman과 Kempthorne(1961)은 s 가 소수의 지수승이고 n 이 양의 정수이며 $m=2$ (s^n-1)($s-1$)-1인 경우에 직교주효과계획 ($s^m | 2s^n$), 또는 $OA(2s^n, s^m, 2)$ 를 구성하는 방법을 제시하였다.

이 직교배열은 $2s$ 개의 부행렬로 분해가 가능하고 또한 각 부행렬에는 1종류의 수준으로만 구성된 열이 하나씩 존재하는데 이 열을 제거한 나머지 직교배열은 $u=2s$ 인 분해가능직교배열 $OA(2s^n, s^{m-1}, 2)$ 이 되므로 혼합수준의 직교주효과계획($2s \times s^{m-1} | 2s^n$) 또는 ($2^1 \times s^m | 2s^n$)을 구성할 수 있다(Gupta et al., 1982).

예를 들어 직교주효과계획 ($2 \times 3^7 | 18$)을 위의 방법으로 구성해 보자. 이미 Addelman과 Kempthorne의 방법에 의해 직교주효과계획($3^7 | 18$) 또는 $OA(18, 3^7, 2)$ 는 표 8처럼 구해졌다. 표 8에서 1열을 제외하면 $OA(18, 3^6, 2)$ 가 되며, 동시에 $u=2s=6$ 인 분해가능배열이 된다. 따라서 $OA(18, 6 \times 3^6, 2)$ 는 다음의 열 (1')로 대치하면 얻을 수 있고, 원하는 $OA(18, 2 \times 3^7, 2)$ 는 표 8에 다음의 열 (1'')를 추가함으로써 구할 수 있다.

(1')	(1'')
1	1
1	1
1	1
2	1
2	1
2	1
3	1
3	1
3	1
4	2
4	2
4	2
5	2
5	2
5	2
6	2
6	2
6	2

다구찌가 소개하고 있는 그 밖의 혼합수준계 중 $L_{54}(2 \times 3^{25}), L_{32}(2 \times 4^9), L_{50}(2 \times 5^{11})$ 등은 모두 위와 같은 방법으로 구성할 수 있다.

4.3 기타 혼합수준의 직교주효과계획

지금까지 소개된 혼합수준의 직교주효과계획 외에 다구찌는 $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$ 과 $L_{36}(2^{11} \times 3^{12})$ 를 제시하고 있다. 이들 계획은 직교배열 $OA(36, 12 \times 3^{12}, 2)$ 로부터 구성할 수 있다는 것이 알려져 있다.

Dey(1985)는 Seiden(1954)에 의해 구성된 $OA(36, 3^{13}, 2)$ 로부터 $OA(36, 12 \times 3^{12}, 2)$ 를 구하였다. 12-수준의 인자는 4-수준과 3-수준을 갖는 2개의 인자로 대치할 수 있으므로 $OA(36, 12 \times 3^{12}, 2)$ 로부터 $OA(36, 4 \times 3^{13}, 2)$ 를 구성할 수 있다. 다음 4-수준의 인자는 3개의 2-수준인자로 대치할 수 있으므로 $OA(36, 4 \times 3^{13}, 2)$ 로부터 $OA(36, 2^3 \times 3^{13}, 2)$ 또는 $36(2^3 \times 3^{13})$ 을 얻는다. 끝으로, 12회의 실험으로 2^{11} 에 대한 직교주효과계획을 구성할 수 있으므로 $OA(36, 12 \times 3^{12}, 2)$ 로부터 $OA(36, 2^{11} \times 3^{12}, 2)$ 또는 $L_{36}(2^{11} \times 3^{12})$ 를 구성할 수 있다.

5. 결론

지금까지 살펴본 바와 같이 다구찌의 직교배열은 직교주효과계획의 일종이다. 따라서 직교주효과계획의 구성원리를 파악함으로써 그 성질을 이해함은 물론 여러 다양한 경우로의 확장이 가능하다. 특히 H-행렬을 이용하여 구성할 수 있는 2-수준계 직교주효과계획 중 실험횟수가 20, 24, 28, 36, 40, 44, ..., 60 등인 계획은 다구찌의 기본 계획에 포함되어 있지 않으나 그 활용가능성에 대한 연구가 필요하다고 본다. 아울러 좀 더 다양한 혼합수준 직교주효과계획을 마련하는 것도 매우 유용하리라 믿어진다.

직교주효과계획에서 만일 교호작용(특히 2인자 교호작용)이 존재한다면, 이들과 주효과간의 교락관계를 파악할 필요가 있다. 다구찌는 이를 위해 대부분의 실험계획에 기본표시와 선점도를 마련해 놓고 있다. 그러나 구체적인 교락관계가 밝혀져 있지 않은 계획에 대해서도 그 적절한 활용을 위해 많은 연구가 필요하다고 생각된다.

◇참 고 문 헌◇

- (1) Addelman, S.(1962), "Orthogonal Main-Effect Plans for Asymmetrical Factorial Experiments", *Technometrics*, 4, 21-46
- (2) Addelman, S. and Kempthorne, O.(1961), "Some Main Effect Plans and Orthogonal Arrays of Strength Two", *Ann. Math. Statist.*, 32, 1167-1176
- (3) Dey, A.(1985). *Orthogonal Fractional Factorial Designs*, Wiley, New York.
- (4) Gupta, V. K., Nigam, A. K. and Dey, A.(1982). "Orthogonal Main Effect Plans for Asymmetrical Factorials", *Technometrics*, 24, 135-137.
- (5) Kempthorne, O(1952). *The Design and Analysis of Experiments*, Wiley, New York.
- (6) Plackett, R. L. and Burman, J.P.(1946). "The Design of Multifactorial Experiments", *Biometrika*, 33, 305-325.
- (7) Raghavara, D.(1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Wiley, New York.
- (8) Rao, C.R.(1946). "On Hypercubes of Strength d and a System of Confounding in factorial Experiments", *Bull. Cal. Math. Soc.*, 38, 67-78.
- (9) Seiden, E.(1954). "On the Problem of Construction of Orthogonal Arrays", *Ann. Math. Statist.*, 25, 151-156.
- (10) Taguchi, G.(1987). *System of Experimented Design*, 1,2, UNIPUB, New York.

