单一시린더機関에 있어 往復質量에 依한 二次共振에 関한 研究

崔 在 星

A Study of Secondary Resonance induced by the Reciprocating Mass of Single Cylinder Engine

Choi Jaesung

目 次

Abstract

In recent years several cases of so-called secondary resonance have been found in torsional vibration of crankshaft systems of multi-cylinder engines.

The phenomena of the secondary resonance remained a mystery for some time, because it could not be explained by the simple linear vibration theory commonly used for the practical calculation of torsional vibration in crankshaft systems.

The analysis of torsional vibrations in reciprocating engine systems is used to be carried out by neglecting the variation in inertia moments of the system causing from the motion of the reciprocating parts. When the variable effect is taken into account, the equation of the motion becomes non linear.

In this paper an approximate equation of the motion of the single cylinder crankshaft is derived theoretically to study the effect of reciprocating mass. The stability criterion of the equation is investigated theoretically and ascertained experimentally.

To verify the result of the analysis, a model of crankshaft system is set up in the laboratory and its vibrations are observed and with the data of the model, the derived equation of the motion is calculated by a digital computor.

記號說明

$J(\alpha)$: 往復部分 및 크랭크의 全慣性모우먼트
J_f : 플라이휠의 慣性모우먼트
J_o : 크랭크암과 連接棒의 回轉部分의 慣性모우먼트의 合
J_c : $J_o+\frac{1}{2}mr^2$
m : 피스턴과 連接棒의 往復部分의 質量
k : 軸의 스프링 定數
β : $\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\Big/\left(J_o+\frac{1}{2}mr^2\right)$
λ : r/ℓ
r : 크랭크암의 길이
ω : 크랭크軸의 回轉速度
ω_n : 固有角振動數
n : ω_n/ω
α : 크랭크回轉角$(\omega t+x)$
x : 비틀림振動振幅

1. 序 論

往復動機關의 軸系振動에 있어서 비틀림振動에 關한 硏究는 지금까지 많은 發展을 해왔다.

그런데 最近 大形船用機關의 크랭크軸系에 豫期치 않은 事故가 때때로 發生하였다는 報告가 있다.[4]

機關의 振動特性에 관한 지금까지의 傳統的인 應力解析方法에 의하면 軸系의 强度는 充分히 安全限度안에 들어있었기 때문에, 그 原因은 상당히 오랫동안 不可思議한 問題로 看做되어왔다. 그러나 近年에 이르러 이것은 크랭크軸系의 비틀림振動에 發生하는 2次共振現象에 의하여 비틀림振動應力이 豫期했던 값보다 컸기 때문이라는 것이 밝혀졌다.[4] 지금까지의 비틀림振動의 解析은 往復運動에 의해서 發生하는 慣性모우먼트의 變化를 無視하고 이것을 단순한 線形振動으로 다루었기 때문에 從來의 應力解析方法으로는 이러한2次共振의 現象을 解析할 수가 없었다.

2次共振에 關한 理論은 Draminsky[1][2][3], Carnegie[4][5], Goldsbrough[6][7]等에 의하여 硏究되어 왔으나 結局은 普通의 線型振動理論으로 計算될 수 없는 非線型振動의 한 種類라는 것이 밝혀졌다.

一般的으로 크랭크軸系의 비틀림 振動을 方程式으로 表示하면 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$J\ddot{x}+c\dot{x}+kx=Q\sin(\omega t+\phi)$$

윗 式에서 알 수 있듯이 振動方程式에는 時間 t와 振動振幅 x에 따라서 4개의 係數 즉 J c, k,

[illegible] 한계 [illegible] 性質을 [illegible] 裝置에 [illegible]
[illegible] 振動에 있어서 減衰係數는 [illegible] 影響을 [illegible]
할 만한 영향을 가질 수 있어 [illegible] 變動을 [illegible]

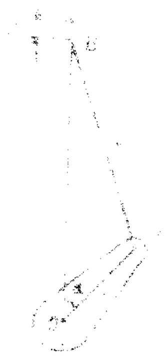
스프링定數 k는 振動에 [illegible] 材質에 [illegible]
[illegible] 機關의 [illegible]

結果 [illegible]
[illegible] 振動質量 [illegible]
[illegible] 變動을 [illegible]
[illegible]

[illegible]
理解 [illegible]
[illegible] 計算値와 比較 [illegible] 從來 [illegible]
共振現象을 具體的으로 [illegible]
大學 [illegible] Digital [illegible]

2. 理論的인 考察

그림 1과 같은 [illegible]



[illegible]

그림 1 [illegible] 概要

[illegible]

一般的으로 λ의 값은 0.25 [illegible]

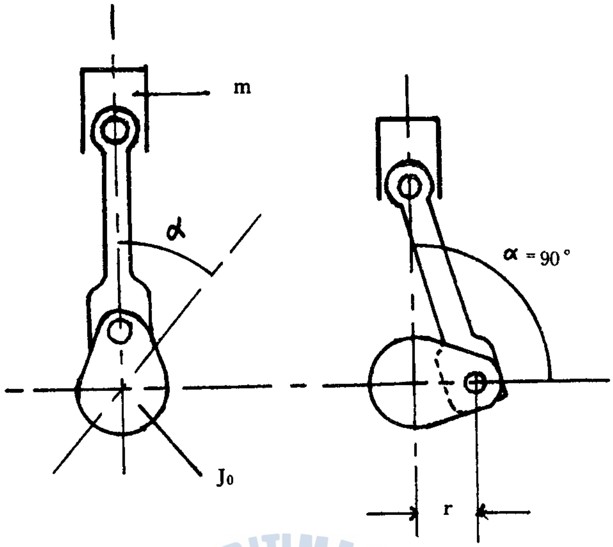


그림 2 往復動部分의 變動慣性 모우먼트

$$mr^2\left(\frac{dy}{rd\alpha}\right) = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2(\lambda\cos\alpha - \cos2\alpha - \lambda\cos3\alpha)$$

지금 $J_c = J_o + \frac{1}{2}mr^2$, $\beta = \dfrac{\frac{1}{2}mr^2}{J_o + \frac{1}{2}mr^2}$ 라 하면 全慣性모우먼트는

$$J_{(\alpha)} = J_c(1 - \sum\beta_p\cos p\alpha) \quad \cdots\cdots(2)$$

여기서 $p=1, 2, 3$, $\beta_1 = -\lambda\beta$, $\beta_2 = \beta$, $\beta_3 = \lambda\beta$ 이다.

式(2)에서 알 수 있는 바와 같이 慣性모우먼트의 變動成分은 3個가 있지만 가장 영향이 큰 $p=2$인 경우를 생각하기로 한다. 따라서 式(2)를 다시쓰면

$$J_{(\alpha)} = J_c(1 - \beta\cos2\alpha) \quad \cdots\cdots(3)$$

그림1에서 피스턴, 連接棒, 크랭크암 等의 運動에너지를 구하면,

$$T = \frac{1}{2}J_{(\alpha)}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}J_c(1 - \beta\cos2\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

크랭크軸系를 單純化하여 그림 3과 같이 플라이휠 F와 크랭크암 C 및 피스턴 p로 構成된 系를 생각하고 그의 크랭크側과 플라이휠側의 각각의 경우에 대하여 Lagrange 方程式을 適用한다. 以下, 本論文에서는 減衰係數c의 영향은 적으므로 無視하고 保存系의 경우를 생

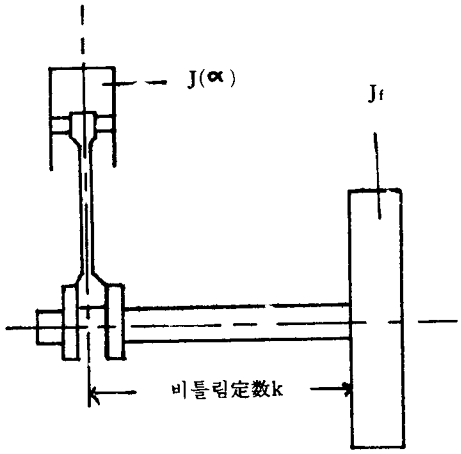


그림 3 큰 플라이휠을 갖는 單一시린더 機關

단, $K/J_e=\omega_n$, $n=\omega_n/\omega$

式 (11)은 다시 $x=y\ exp\left[-\int\frac{\beta\sin2\alpha}{1-\beta\cos2\alpha}d\alpha\right]$로 놓으면

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{1}{(1-\beta\cos2\alpha)^2}\ \{\beta^2+n^2-\beta(2+n^2)\ \cos2\alpha+\beta^2\cos^22\alpha\}y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$(1-\beta\cos2\alpha)^{-2}\fallingdotseq1+2\beta\cos2\alpha$를 利用하고 β^2以上의 微小項을 省略하면 윗 式은 結局 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\{n^2-\beta(2-n^2)\cos2\alpha\}y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$2\alpha=z$라 하면

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left\{\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4}\beta(2-n^2)\cos z\right\}y=0$$

$z\to z+\pi$로 置換하면

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left\{\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}\beta(2-n^2)\cos z\right\}y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

式(14)는 典型的인 Mathieu 方程式의 型態를 갖추고 있다. 즉,

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\{a+2b\cos z\}y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{1}{4}n^2\\ 2b&=\frac{1}{4}\beta(2-n^2)\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

Mathieu 方程式은 代表的인 非線型方程式의 一種으로서 通常의 微分方程式과 같은 解를 求하는 것이 困難하므로 여기서는 그 解의 安定性을 檢討하여 봄으로써 必要한 結果를 얻기로 한다. 그런데 여기서는 $x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta\cos2\alpha}}y$ 이므로 x代身 y의 安定性에 對하여 論하면 된다. β가 微

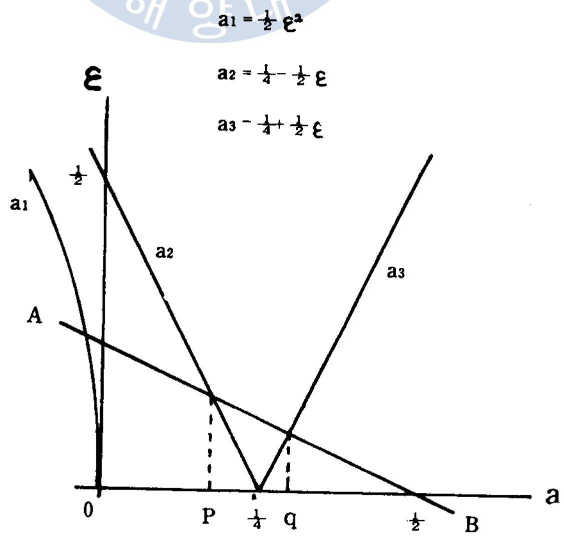


그림 4. Mathieu 方程式(15)의 安定判別圖

[illegible] $(a=1.5)$ [illegible] 系의 安定性에 對하여 [illegible] 2 [illegible] 討論하여 [illegible] 妥當하다. 式(13)의 安定[illegible] 圖는 [illegible]

[illegible]

$$\beta\lambda = \frac{1}{2}[\illegible] 2\sigma \qquad \cdots\cdots (17)$$

[illegible] 한 [illegible] 的 AB [illegible] α [illegible] 點의 [illegible] (18) [illegible]

$$\left.\begin{aligned} p &= [\illegible] \\ q &= [\illegible](2+3)[\illegible] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (18)$$

[illegible] 그러므로

$$n < [\illegible]$$

[illegible] 不安定하게 된다. [illegible]

$$2\sqrt{p} < n < 2\sqrt{q} \qquad \cdots\cdots (19)$$

[illegible] 式(2)로 [illegible] 項, 즉 $\lambda\cos\alpha$의 項을 [illegible] 式(13)을 [illegible] 같이 [illegible]

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (n^2 + \beta(2 - [\illegible])\lambda\cos\alpha)y = 0$$

式(13)에서 式(18)까지의 過程을 [illegible] 方法으로 適用하면

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \{n'^2 + \beta(2-n'^2)\lambda\cos z\}y = 0 \qquad \cdots\cdots (14')$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a' + 2\sigma'\cos z)y = 0 \qquad \cdots\cdots (15')$$

$$\left.\begin{aligned} a' &= n'^2 \\ 2\sigma' &= \beta\lambda(2 - n'^2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (16')$$

$$2\sigma' = \beta\lambda(2 - [\illegible])$$

$$\left.\begin{aligned} p' &= \left(\frac{1}{4} + \beta\lambda\right) [\illegible] \left(1 - \frac{1}{2}\beta\lambda\right) \\ q' &= \left(\frac{1}{4} + \beta\lambda\right) [\illegible] \left(1 + \frac{1}{2}\beta\lambda\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (18')$$

따라서

$$\sqrt{p'} < n' < \sqrt{q'} \qquad \cdots\cdots (19')$$

通常의 [illegible] 振動解析에 있어서 [illegible] 따라서 이때에 [illegible] 不安定하게 되는 [illegible] 共振點 [illegible] 이때에 往復質量에 依한 慣性모우멘트의 變動을 考慮에 [illegible] 共振點 以外에도 또 다른 不安定한 點이 있다는 것을 알 수 있다. [illegible] $2\sqrt{p} < n <$ $2\sqrt{q}$는 通常의 共振點을 보이는 것이며 $\sqrt{p'} < n' < \sqrt{q'}$는 $\omega = 2\omega_e$, 즉 $n = n' = 1, 2$ [illegible]

不安定領域으로서 소위 2次共振이라는 現象이다.

이와같이 2次共振現象은 往復質量에 依한 慣性모우멘트의 變動이 惹起하는 現象으로서 從來와 같이 慣性모우멘트가 一定하다는 計算으로는 說明할 수 없는 現象이다.

3. 實驗裝置 및 實驗方法

實驗裝置는 單一시린더 機關이 軸을 거쳐 플라이휠을 驅動하는 대신에 플라이휠을 거쳐 피스턴을 驅動하는 構造로 하였다. 이렇게 하더라도 解析上의 特性에 아무런 影響을 미치지 않음은 분명하다.

그림5는 實驗裝置의 全體組立圖이며 그림 6은 全體裝置圖이다. 表1은 그의 資料이다.

플라이휠과 驅動軸은 키이홈을 만들어서 固定하고 크랭크암도 같은 方法으로 軸에 固定하였으며 베어링은 4個所에 設置하였다. 피스턴과 피스턴핀 및 시린더라이너는 디이젤機關에서 使用中인 것을 借用하였으며 連接棒은 別途로 製作하여 피스턴과는 機關의 피스턴핀베어링으로, 크랭크핀과는 볼베어링을 利用하여 連結하였다.

플라이휠과 變速모우터를 A형 V벨트로 連結하여 플라이휠을 驅動하도록 하였다.

그림7은 變速모우터를 보이고 있으며 表2는 變速모우터의 特性을 보이고 있다.

그림8은 計測에 使用한 Geiger 비틀림振動計(Geiger torsiograph)를 보이며 表3은 그의 特性을 보여주고 있다.

모우터의 풀리直徑은 6.5*cm*로서 減速比는 1:5.4이다.

記錄紙에 時間과 回轉數가 記錄되나 모우터側의 回轉數를 整定하기 위하여 스트로보스코우프에 의하여 必要한 回轉數로 設定하고 適當한 간격으로 回轉數를 增加하면서 振動振幅을 記錄하였다. 또한 記錄裝置驅動用 풀리는 記錄을 되도록 正確하게 하기위하여 綿布平벨트를 使用하였다

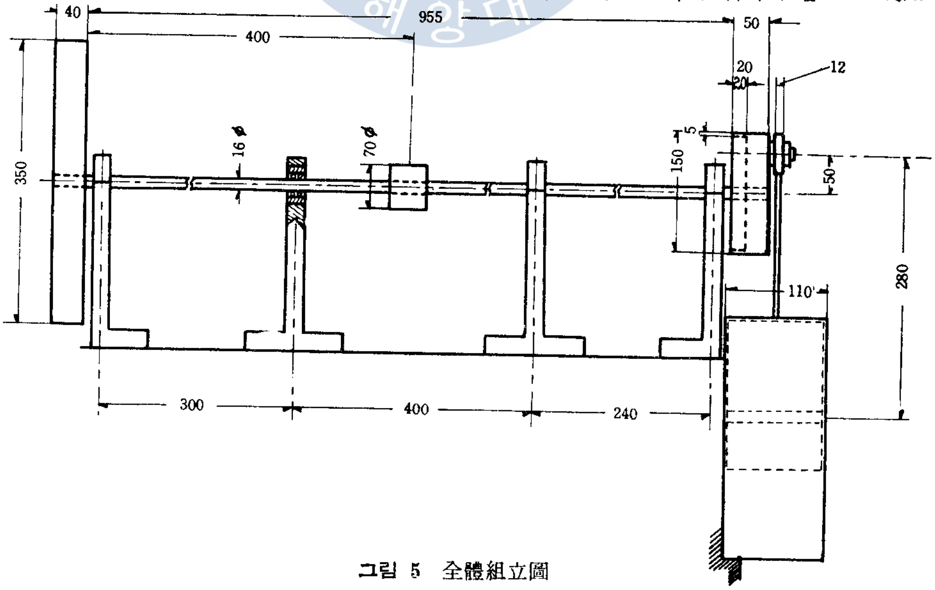
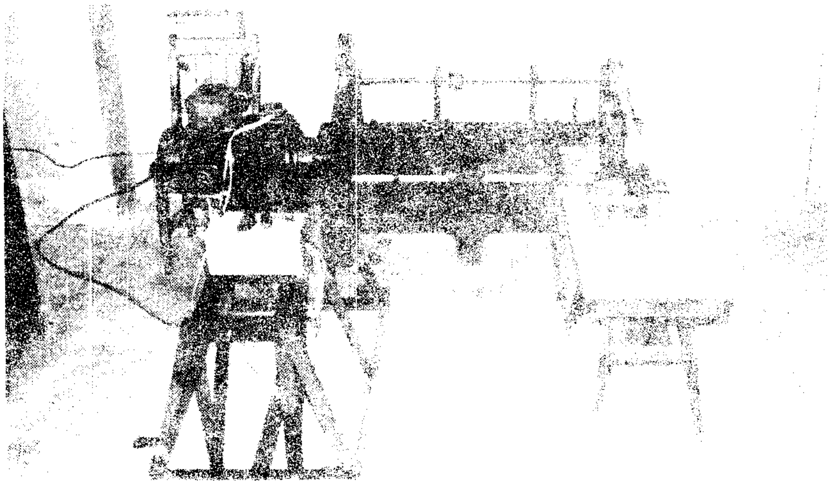


그림 5 全體組立圖



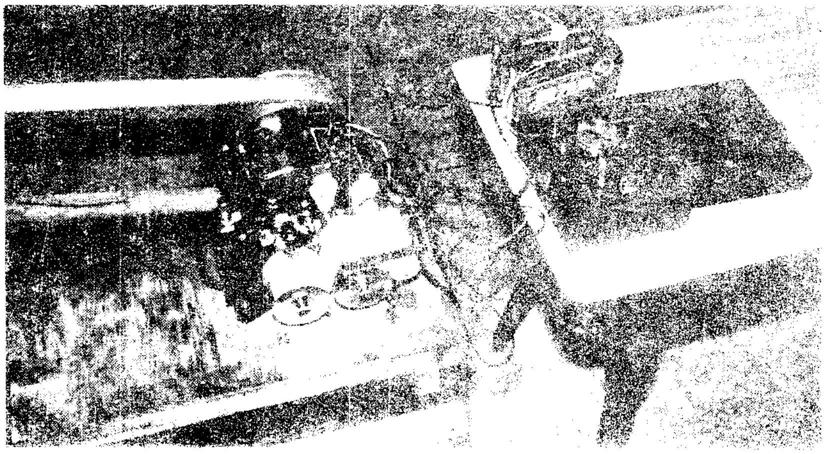


表 1 全體裝置圖의 資料

項 目	記 號	數 値	單 位
플라이휠慣性 모우먼트	J_f	4346.69	$kg\cdot sec^2 cm$
크랭크平均慣性모우먼트	J_c	194.97	$kg\cdot sec^2 cm$
軸의 비틀림定數	k	5284.65	$kg\cdot cm/rad$
往復質量	m	3.666	$kg\cdot sec^2\cdot cm^{-1}$
$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)/\left(J_c+\frac{1}{2}mr^2\right)$	β	0.2350	
(크랭크半徑)/(連接棒길이)	λ	0.1786	
固有角振動數	ω_n	5.3217	rad/sec
軸의 橫彈性係數	G	8.3×10^5	kg/cm^2

表 2 變速모우터의 特性

項 目	記 事
型 式	VSM—FT
出 力	1.5KW(2HP)
電 壓	200V
電 流	6.6A
周波數×極數	60Hz×4p
토오크	0.8$kg\cdot m$
勵磁電壓×電流	(0～80V)×(0.～4A)
回轉數	150～1500rpm
製作會社	東洋電氣(株)

表 3 Geiger 비틀림진동계의 特性

項 目	記 事
製作會社	AKASHI. JAPAN
型 式	GRV—2
固有振動數	1.2 cps
測定振幅範圍	0.1～1.13mm
測定振動數範圍	200～2000cpm
記錄倍率	3, 6, 12倍

(1) 固有振動數의 計算

計算에 必要한 資料中 連接棒의 質量은 2個의 同一한 저울을 利用하여 피스톤側은 피스톤의 質量에 包含시켜서 各各의 慣性모우멘트를 求하였다.

表1의 資料에 의하여 模型크랭크軸系의 固有振動數를 求하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 = \frac{k}{J_1 J_2}(J_1 + J_2)$$

$$= 28.32$$

$$\omega_n = 5.32\ rad/sec$$

위의 값을 式(19) 및 (19')에 代入하여 整理하면

$$5.06 < \omega < 5.44 \quad \cdots\cdots (20)$$

$$9.96 < \omega < 11.54 \quad \cdots\cdots (21)$$

따라서 模型크랭크軸系는 (20)式과 (21)式에 의하여 定하여지는 範圍에서 不安定하게 된다.

(2) 實驗結果

그림9는 模型크랭크에 대하여 얻어진 記錄이다. 變速모우터의 速度가 느린 範圍에서는 出力이 弱하여서 回轉速度가 고르지 못하고 또한 驅動機構에서 發生하는 減衰力 때문에 明白한 安定限界를 보이지 않으나 $\omega = 5.0 \sim 5.4$에서 가장 振幅이 크게 나타나며 若干 振幅이 縮小되었다가 $\omega = 9.7 \sim 11.0$에서 다시 커지고 $\omega = 11.5$에서부터 작아지기 시작한다. $\omega = 5.8 \sim 9.2$의 範圍에서도 振幅이 크게 나타나는 것은 ω_1과 ω_2의 兩側共振點에 있어서의 影響이 겹치는데 原因이 있는 것으로 推定된다.

(3) 電子計算機에 의한 數値計算結果

그림10은 電子計算機에 의하여 數値計算結果를 圖表로 表示한 것이며 $\omega = 6 \sim 9$는 計算結果가

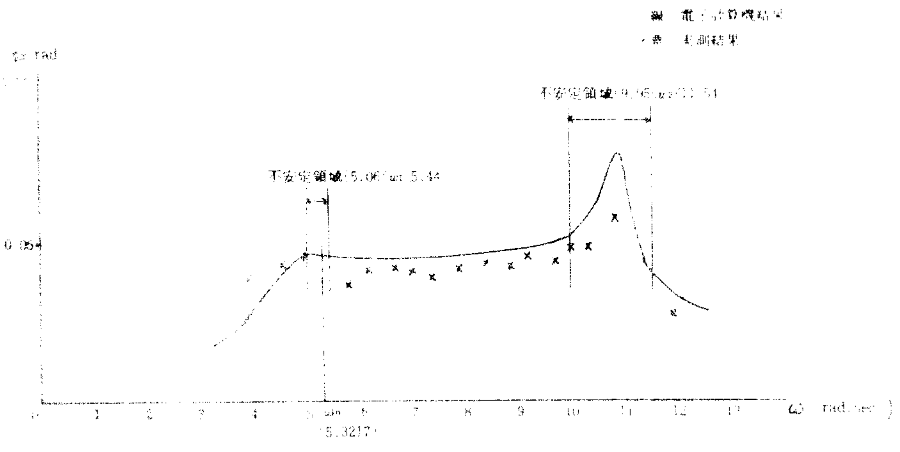


그림 10 電子計算機에 依한 數値計算結果 및 實驗結果에 依한 實測値

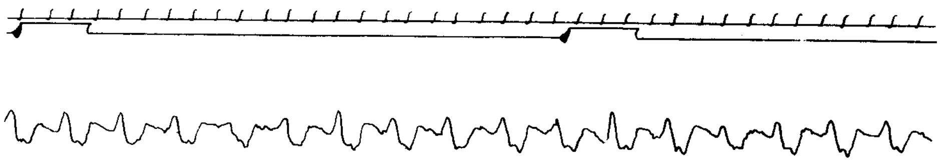


그림 9−1 ω=2.8

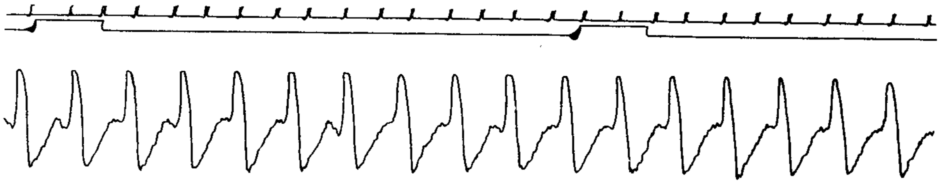


그림 9−2 ω=3.9

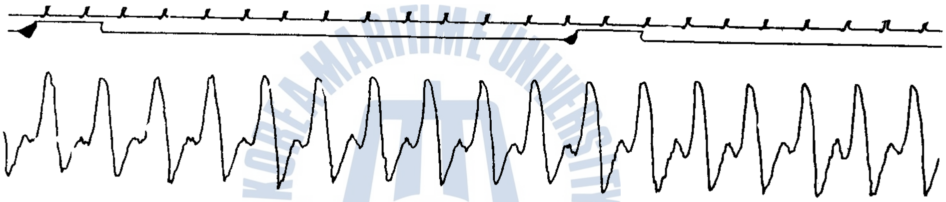


그림 9−3 ω=4.6

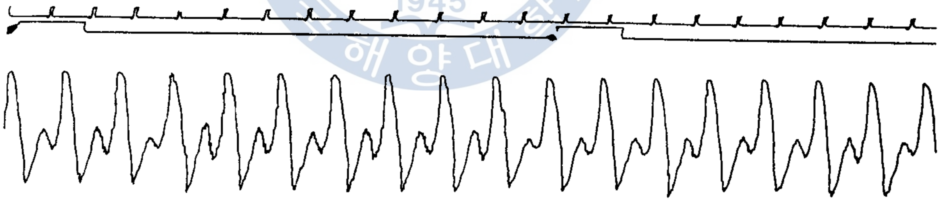


그림 9−4 ω=5.0

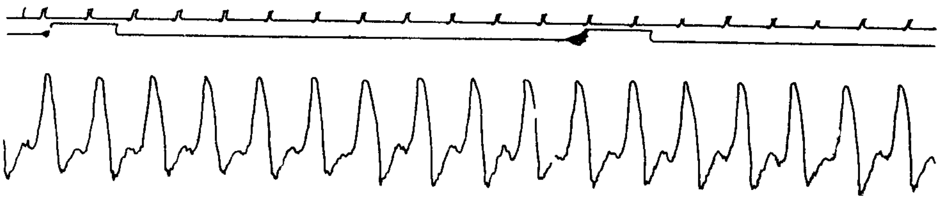


그림 9−5 ω=5.4

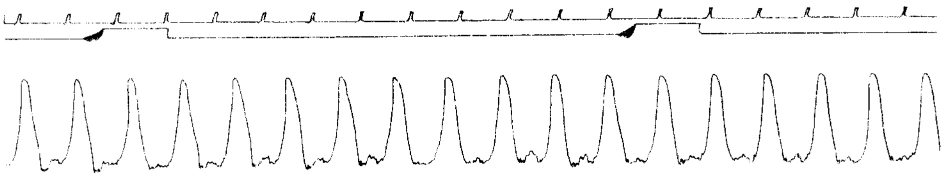


그림 9—6 ω =5.8

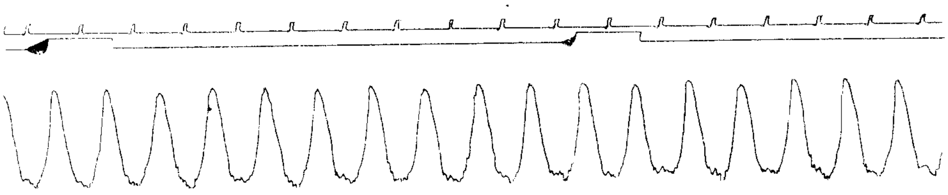


그림 9—7 ω =6.2

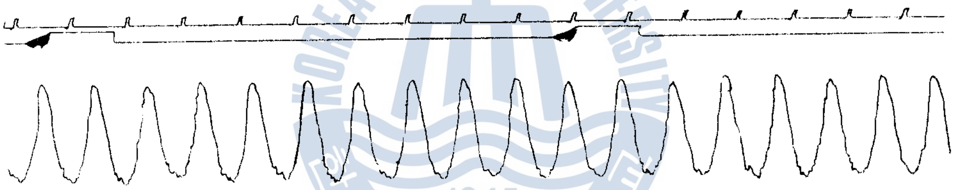


그림 9—8 ω =6.7

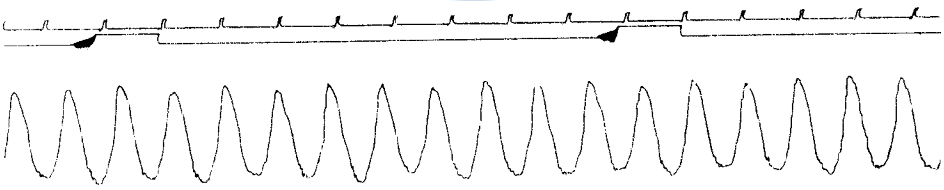


그림 9—9 ω =7.0

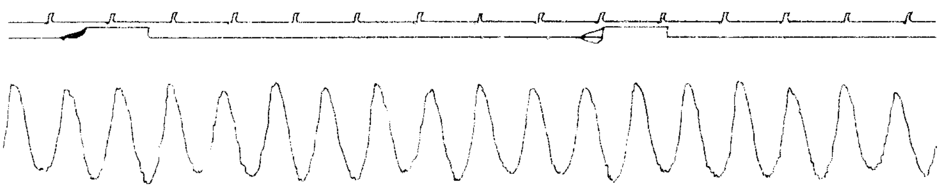


그림 9—10 ω =7.4

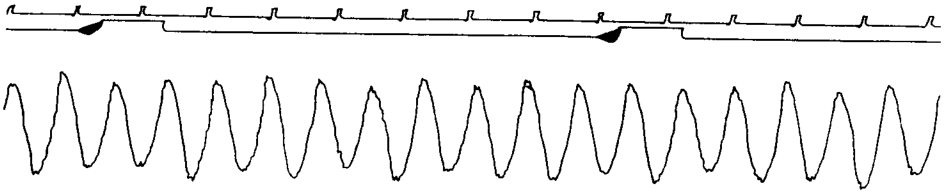


그림 9-11 ω =7.9

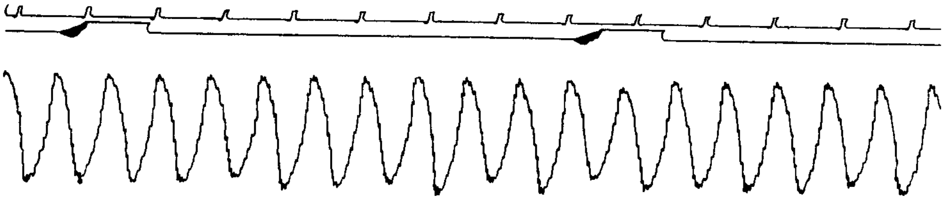


그림 9-12 ω =8.4

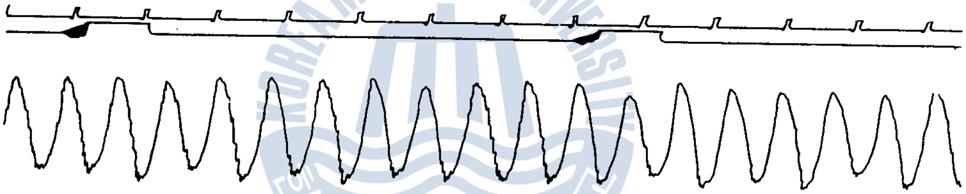


그림 9-13 ω =8.8

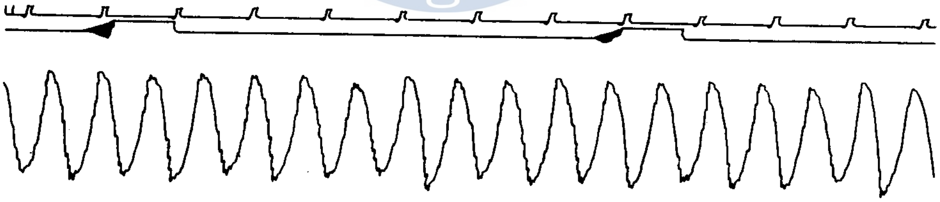


그림 9-14 ω =9.2

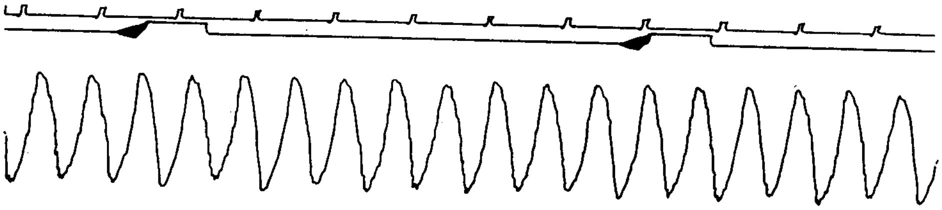


그림 9-15 ω =9.7

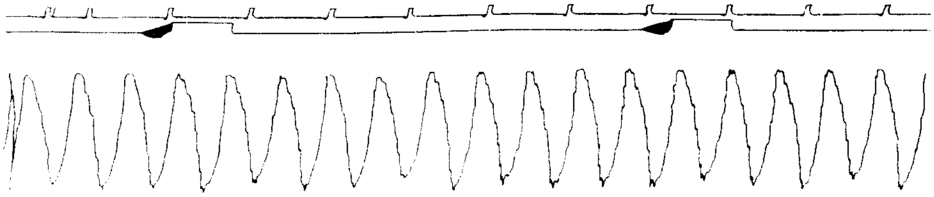


그림 9-16 ω =10.0

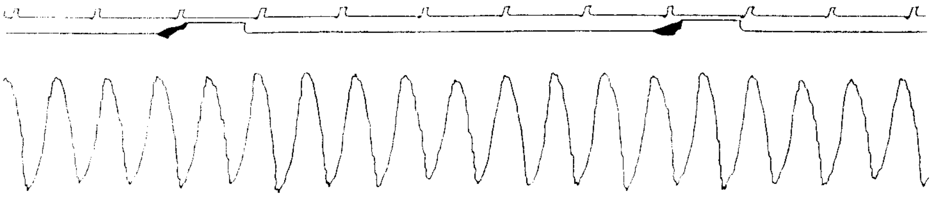


그림 9-17 ω =10.3

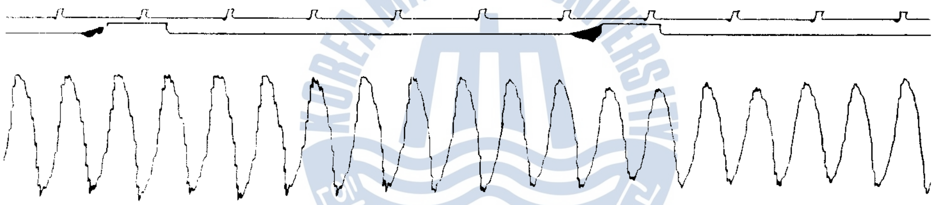


그림 9-18 ω =10.8

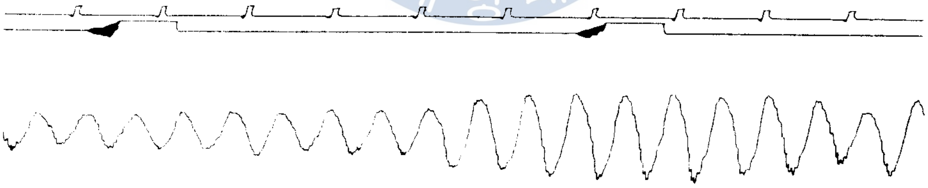


그림 9-19 ω =11.2

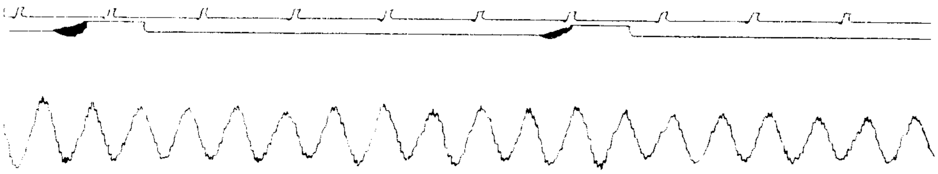


그림 9-20 ω =11.9

없어서 確實한 傾向은 알 수가 없으나 大體로 本論文에서 보이는 結果를 보여주고 있다. 또한 實測結課와 計算結果를 比較하여 보기위하여 計測한 振幅을 $\omega=5$의 것을 基準으로하여 記入하여 보았다. 大體로 一致하나 $\omega=10.8$ 附近의 最大振幅은 實測値와 計算値의 傾向은 一致하나 크기에 相當한 差가 있음을 보여 주고 있다. 이것은 實測에서는 減衰力이 作用하고 있으며 모구나 減衰力은 振幅의 제곱에 比例함을 生覺한다면 相當한 差가 있음은 納得할 수 있다.

5. 結 論

以上의 結論으로서 往復質量을 갖는 크랭크軸系의 비틀림振動을 計算할 때는 通常 往復質量의 影響을 無視하였으나 이때에는 二次共振의 可能性을 豫見할 수 없으며, 往復質量을 考慮함으로써 비로서 二次共振까지도 檢討할 수 있음을 알 수 있게 되었다.

그러나 往復質量을 考慮할 때에 運動方程式은 相當히 複雜하게 되며 近似計算을 하더라도 簡單明僚하게 풀이 할 수 없는 非線型微分方程式인 Mathieu 方程式으로 된다.

이때에는 安全判別法에 의하거나 電子計算機에 의하여 共振點을 찾아낼 수 있다.

끝으로, 本論文에서는 往復質量이 크랭크軸系 비틀振動에 미치는 影響을 가장 簡單한, 큰 플라이휠을 갖는 單一시린더機關에 關하여 檢討하였으나 좀 더 實用性있는 結果를 얻기위해서는 多시린더機關에 對한 檢討가 필요하다.

參 考 文 獻

1) P. Draminsky, Act Polytechnica Scandinavia, Mech. Engng. Series 10, 1961
2) P. Draminsky, The Marine Engineer and Naval Architect. Jan., 1965, p. 22-25.
3) P. Draminsky, The Marine Engineer and Naval Architect. April, 1965, p. 180-186.
4) W. Carnegie, et al, Trans. I. Mar. E. Voi. 84, 1872 p. 160—167.
5) W. Carnegie, et al, Shipbuil. & Marine Engng. Int., July. 1973. p. 583—584.
6) G. R. Goldsbrough, Proc. Royal Society, Vol. 113. 1926, p. 259—281.
7) G. R. Goldsbrough, Proc. Royal Society Vol.. 190 1925, p. 99—119.
8) 高橋利衛, "振動工學 演習" (1) オーム社, 1967, p. 221.

附 錄

Mathieu 方程式의 安定判別圖

Mathieu 方程式은 통상 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{y}+\{a+2b\cos z\}y=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

式(1)에서 $2b=\varepsilon$이라 하고 $\varepsilon\to0$이라 하면 (1)式의 基本解는 $\cos\sqrt{a}\,z, \sin\sqrt{a}\,z$이다. 지금 未知

函數y 및 安定, 不安定의 境界線의 方程式 $a=a(\varepsilon)$을 ε의 멱급수로 展開하면

$$y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(2)$$

$$a=a_0+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a^2+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(3)$$

로 된다. 式(2), (3)을 (1)에 代入하면

$$(\ddot{y}_0-\varepsilon\ddot{y}_1+\varepsilon^2\ddot{y}_2+\cdots\cdots)+\{(a_0+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\cdots\cdots)+\varepsilon\cos z\}(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\cdots)=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

(4)式을 ε에 關하여 整理하고, ε의 同次의 係數를 0으로 놓으면

(ε^0) $y_0''+a_0y_0=0$

(ε^1) $y_1''+a_0y_1=-a_1y_0-y_0\cos z$

(ε^2) $y_2''+a_0y_2=-a_2y_0-a_1y_1-y_1\cos z$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

(ε^0)式과 本文의 (16)式으로 부터

$$a_0=n^2/4 \ (n=0,1,2) \quad \cdots\cdots(5)$$

$$y_0=\cos\left(\frac{n}{2}n\right),\ \sin\left(\frac{n}{2}z\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

(1) $n=0$ 일때 $a_0=0$, $y_0=1$ 이므로 (ε^1)式은

$$\ddot{y}_1=-a_1-\cos z$$

y_1이 周期函數로 되기 위해서는

$$a_1=0 \quad \therefore\ y_1=\cos z+C \ (C\text{는 積分常數})$$

이 때 (ε^2)式은

$$\ddot{y}_2=-a_2-(\cos z+C)\cos z$$
$$=-a_2-\frac{1}{2}-C\cos z-\frac{1}{2}\cos 2z$$

y_2가 周期函數로 되기 위해서는

$$a_2=-\frac{1}{2}$$

따라서 ε^2까지의 近似로서 境界線의 方程式은

$$a=-\frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad \cdots\cdots(7)$$

로 된다.

(2) $n=1$ 일 때 $a_0=\frac{1}{4}$, $y_0=\cos\left(\frac{z}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{z}{2}\right)$

(2-a) $y_0=\cos\left(\frac{z}{2}\right)$ 일때 (ε^1)式은

$$y_1''+\frac{1}{4}y_1=(-a_1-\cos z)\cos\frac{z}{2}$$
$$=\left(-a_1-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}z$$

y_1이 周期函數로 되기 위해서는

$$a_1=-\frac{1}{2}$$

따라서 ε'까지의 近似로서 境界線의 方程式은

$$a \doteqdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \cdots\cdots(8)$$

(2-b) $y_0 = \sin\frac{z}{2}$ 일때 같은 方法으로 境界線의 方程式을 求하면

$$a \doteqdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \cdots\cdots(9)$$

로 된다. 그러므로 式(7), (8), (9)를 (a, ε)座標平面에 그리면 그림4와 같이 된다.

境界線으로 둘러싸인 領域이 安定領域인가 不安定領域인가는 表(4)를 보고 다음과 같이 考察하여 보면 알 수 있다.

즉, $\varepsilon=0$이면 特性根이 等根인 경우와 같고 1次獨立인 周期解가 얻어진다. 따라서 $\varepsilon=0$때의 轉移値 $a_{0i}(i=0,1,3)$는 安定領域에 속한다. 또, $a<0$이면 負의 스프링定數의 경우에 상당하므로 역시 ε이 크게 되지 않으면 不安定하게 된다.

따라서 그림11의 左端과 같이 判斷할 수 있다. 또 a_{00}와 a_{01}이 安定値인 것으로부터 閉區間 $[a_{00}, a_{01}]$이 安定領域에 속하는 것도 알 수 있다.

表 4 $\varepsilon=0$ 때의 狀態

n	n=0	n=1	n=2	n=3
基 本 解	$\cos(0)$ $\sin(0)$	$\cos\left(\frac{z}{2}\right)$ $\sin\left(\frac{z}{2}\right)$	$\cos(z)$ $\sin(z)$	$\cos\left(\frac{3z}{2}\right)$ $\sin\left(\frac{3z}{2}\right)$
周 期	任 意	4π	2π	4π

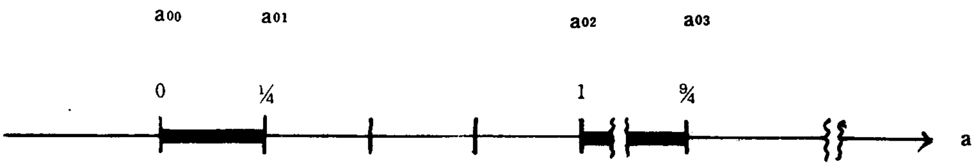


그림 11 $\varepsilon=0$때의 a_{0i}의 分布