
도립막대 시스템의 LQ 제이기 설계

소명옥* · 오세준* · 유희한* · 남택근* · 강인철* · 이찬하* · 최한우*

Design of a LQ Controller for an Inverted Pole System

Myung-Ok So · Sea-June Oh* · Heui-Han Yoo* · Taek-Kun Nam* · In-Chul Kang*
Chan-Ha Lee* · Han-Woo Choi**

Abstract

An Inverted Pole is one of the control mechanism that has been frequently used to verify a control theory in the laboratory. It consists of a cart which slides on a ground stainless steel shaft.

This paper is to design a LQ controller for an inverted pole system which is capable of maintaining the pole at vertical position. In this scheme a mathematical model for the system is obtained in state space representation. Finally the effectiveness of the proposed controller is verified through computer simulation of an inverted pole system.

I. 서론

제어이론을 실제 시스템에 적용할 수 있는지는 여러 가지 실험장치를 통해 입증할 수 있으며, 도립막대 시스템이 그 대상으로 폭넓게 이용되고 있다. 이 시스템의 연구 결과는 보행 로봇과 미사일과 같은 비행체의 자세제어, 크레인의 흔들림 방지제어 등에 주로 응용된다.

도립막대에 관련된 연구로는 Kapitza가 도립막대 시스템을 처음으로 설계한 이후, Schaefer와 Cannon이 bang-bang 제어 기법을, Koeigsberg

와 Frederick가 출력제한 기법을 이용하여 도립 상태에 있는 Bending Beam을 안정화시킬 수 있는 제어시스템을 설계하였고^{[1][2][3]} Strugeon과 Loscutoff는 상태공간을 이용한 출력제한 제어기로서 관측기 레귤레이터형 제어를 이용하여 도립진자를 안정화시킬 수 있는 제어시스템을 설계하였으며^[4], Feng 등은 극점배치법과 최적 제어법을 비교 분석하여 도립진자 시스템의 안정화에 대한 시뮬레이션 결과를 발표하였다^[5].

본 논문에서는 이러한 도립막대 시스템을 제어대상으로 선정하여 대차를 가능한 고속으로

* 한국해양대학교

움직이면서 대차가 목표위치에 도달했을 때 막대의 흔들림을 가능한 한 빨리 제어하도록 하는 LQ 제어기의 설계 기법을 제안하고, 제안한 제어기에 대해 계단상의 목표치 변경에 대한 추종성과, 막대의 길이 변화로 야기되는 파라미터 변화와 외란 등의 제어환경 변화에 대한 강인성을 시뮬레이션을 통해 입증하고자 한다.

II. 도립막대 시스템의 모델링

2.1 도립막대 시스템의 개요

Fig. 2.1은 도립막대 시스템의 동역학적 직교좌표계를 단순화하여 표현하였으며 시스템의 운동을 표시하기 위해 대차의 수평방향 변위를 z , 수직방향 변위를 y 로 표시한다. 대차는 전동기에 연결된 와이어 로프 드럼의 회전에 의해 와이어 로프를 풀고 감음으로써 좌(-), 우(+) 1차원의 수평방향으로 이동할 수 있으며 막대는 피봇을 중심으로 좌(-), 우(+)로 자유로이 회전할 수 있다.

제어목적은 전동기에 전압 $u[V]$ 를 인가하여 와이어 로프 드럼을 구동시켜 대차를 좌, 우의 수평방향으로 움직이게 함으로써 막대의 균형

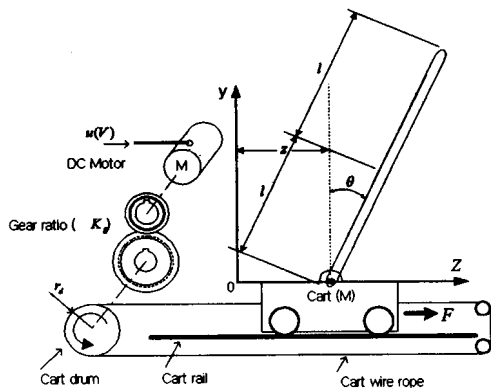


Fig. 2.1 Coordinate system of an inverted pole

을 유지하면서 짧은 시간 내에 원하는 위치로 대차를 이동시키는 것이다.

2.2 도립막대 시스템의 수학적 모델링

2.2.1 대차와 막대의 운동방정식

Fig. 2.2는 모터 구동부를 제외한 대차와 막대 시스템을 표시한 것으로서 막대의 수직에 대한 각도를 $\theta[\text{rad}]$, 각속도를 $\dot{\theta}[\text{rad/s}]$, 대차의 수평방향 위치를 $z[\text{m}]$, 대차의 수평방향 속도를 $\dot{z}[\text{m/s}]$, 대차의 질량을 $M[\text{kg}]$, 대차의 마찰계수를 $c_1[\text{kg/s}]$, 막대의 질량을 $m[\text{kg}]$, 막대의 길이를 $2l[\text{m}]$, 막대의 회전모우멘트 계수를 $c_2[\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}]$, 중력 가속도를 $g[\text{m/s}^2]$, 대차에 가해지는 힘을 $F[\text{N}]$, 막대가 넘어질 때 대차가 막대로부터 받는 반력 또는 대차에 부여된 반력의 반작용에 의한 힘을 $F_b[\text{N}]$, 막대가 대차로부터 받는 반력을 $F_a[\text{N}]$, 막대의 중력에 의한 힘을 $mg[\text{N}]$, 속도에 비례한 마찰력을 $c_1\dot{z}[\text{N}]$ 라고 정의하고, 막대가 회전할 때 지점축의 마찰에 의해 각속도 $\dot{\theta}$ 에 비례한 모멘트 $c_2\dot{\theta}$ 를 받는다고 가정한다.

먼저 막대의 중심좌표 $G(z_0, y_0)$ 를 아래와 같이

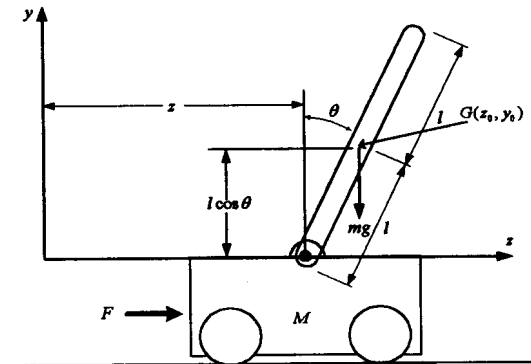


Fig. 2.2 An inverted pole system

정의하고 대차가 수평방향으로 운동할 때 대차와 막대에 대한 운동방정식을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{막대의 중심좌표 } G(z_0, y_0) \\ z_0 = z + l \sin \theta, \quad y_0 = l \cos \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{대차의 수평방향 운동방정식} \\ M\ddot{z} = F - c_1 \dot{z} - F_h \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{막대의 수평방향 운동방정식} \\ F_h = m \ddot{z}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{막대의 수직방향 운동방정식} \\ F_v - mg = m \ddot{y}_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{막대 중심 주위의 회전 운동방정식} \\ F_v l \sin \theta - F_h l \cos \theta - c_2 \dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.3)을 (2.2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 비선형 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{z} = \frac{F - ml(\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) - c_1 \dot{z}}{M + m} \quad (2.6)$$

(2.3)과 (2.4)를 (2.5)에 대입하여 F_h 와 F_v 를 소거하여 정리하면 다음과 같다.

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml \dot{z} \cos \theta - mgl \sin \theta + c_2 \dot{\theta} = 0 \quad (2.7)$$

(2.6)을 (2.7)에 대입하여 $\dot{\theta}$ 에 관하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = \frac{g \sin \theta - \frac{\cos \theta}{M+m} \{F + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - c_1 \dot{z}\} - \frac{c_2 \dot{\theta}}{ml}}{l - \frac{ml \cos^2 \theta}{M+m}} \quad (2.8)$$

다시 (2.8)을 (2.6)에 대입하여 \dot{z} 에 관하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{z} = \frac{F - ml \cos \theta \left[\frac{g \sin \theta - \frac{\cos \theta}{M+m} \{F + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - c_1 \dot{z}\} - \frac{c_2 \dot{\theta}}{ml}}{l - \frac{ml \cos^2 \theta}{M+m}} \right] + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - c_1 \dot{z}}{M+m} \quad (2.9)$$

여기서, θ 의 변동이 미소하다고 가정하고 $\theta \cong 0$ 근방에서 선형으로 근사화하면 $\sin \theta \cong \theta$, $\cos \theta \cong 1$, $\dot{\theta}^2 \cong 0$ 로 되며, 대차의 이동속도에 비례한 마찰력 $c_1 \dot{z}$ 와 막대가 회전할 때 피벗축의 마찰에 의해 각속도 $\dot{\theta}$ 에 비례한 모멘트 $c_2 \dot{\theta}$ 는 미소하므로 무시한다.

위에서 가정한 사항을 (2.8)과 (2.9)에 대입하면 선형화된 (2.10)과 (2.11)을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml} \theta - \frac{1}{Ml} F \quad (2.10)$$

$$\dot{z} = -\frac{mg}{M} \theta + \frac{1}{M} F \quad (2.11)$$

2.2.2 구동부의 운동방정식

상기의 운동 방정식에서 대차에 가해지는 힘 F 와 구동 모터에 인가되는 전압 u 의 관계를 구한다. 모터에 전압을 가하면 모터에 회전력이 발생되고 이 회전력이 기어박스를 거쳐 와이어 드럼을 회전시킴으로써 대차에 힘 F 가 작용하게 된다. Fig. 2.3은 모터를 포함한 대차 구동부를 나타내고 있으며, Table 2.1은 구동부의 각종 기호와 파라미터를 정리한 것이다.

직류전동기의 인가전압 u , 전기자전류 i_a , 모터의 회전각속도 ω_1 , 모터의 회전력 τ_1 , 드럼축의 회전력 τ_2 , 와이어 로프에 걸리는 힘 F 라고 이 들간의 관계를 유도한다. 이 때 모터의 인덕턴스

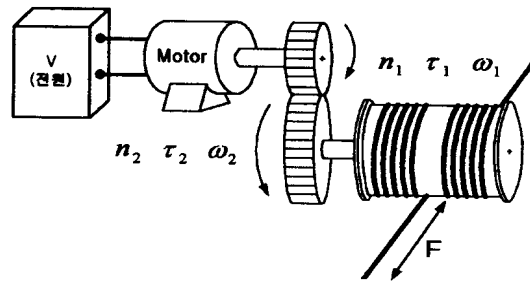


Fig. 2.3 DC motor driving system for an inverted pole system

Table 2.1 Parameters of the D.C. Motor driving system

Parameters	Unit	Descriptions
u	[V]	Input voltage
i_a	[A]	Motor armature current
K_m	[V/rad/s]	Motor torque constant
K_g		Gear ratio in gear box
r_d	[m]	Wire drum radius
R_a	[Ω]	Motor armature resistance
τ_1	[N·m]	Torque of the motor pinion
τ_2	[N·m]	Torque of the driven toothed wheel in motor gearbox
ω_1	[rad/s]	Angular velocity of the motor pinion
ω_2	[rad/s]	Angular velocity of the driven wheel in motor gearbox
n_1		Teeth numbers of the motor pinion gear
n_2		Teeth numbers of the driven gear

값은 미소하므로 무시한다.

$$u = i_a R_a + K_m \omega_1 \quad (2.12)$$

$$\tau_1 = K_m i_a \quad (2.13)$$

$$\tau_2 = F r_d \quad (2.14)$$

기어박스의 기어비 $K_g = n_1/n_2$ 이며, 와이어 드럼축의 회전각속도 $\omega_2 = \omega_1/K_g$, 드럼축의 회전력 $\tau_2 = K_g \tau_1$ 이다. 대차의 이동속도 $\dot{z} = r_d \omega_2$ 이므로 (2.12)를 다시 쓰면 다음과 같이 표현된다.

$$u = -\frac{R_a r_d}{K_g K_m} F + \frac{K_g K_m}{r_d} \dot{z} \quad (2.15)$$

$$F = -\frac{K_g^2 K_m^2}{R_a r_d^2} \dot{z} + \frac{K_g K_m}{R_a r_d} u \quad (2.16)$$

2.2.3 구동부를 포함한 전체 운동방정식

구동부인 모터 및 기어박스도 제어대상에 포함시켜 모델링하기 위해서 (2.16)을 (2.10)과 (2.11)에 대입해서 z 와 θ 에 관한 2계 미분방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\ddot{z} = -\frac{K_g^2 K_m^2}{M R_a r_d^2} \dot{z} - \frac{mg}{M} \theta + \frac{K_g K_m}{M R_a r_d} u \quad (2.17)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K_g^2 K_m^2}{M I R_a r_d^2} \dot{z} + \frac{(M+m)g}{M I} \theta - \frac{K_g K_m}{M I R_a r_d} u \quad (2.18)$$

(2.17)과 (2.18)에서 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ 로 상태변수를 정의하고 동적방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.19)$$

$$y = Cx \quad (2.20)$$

$$\text{단, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_g^2 K_m^2}{M R_a r_d^2} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_g^2 K_m^2}{M I R_a r_d^2} & \frac{(M+m)g}{M I} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_g K_m}{M R_a r_d} \\ 0 \\ -\frac{K_g K_m}{M I R_a r_d} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

Ⅲ. LQ 제어기 설계

플랜트에 적분기가 없는 0형 플랜트이므로 1형 서보시스템을 설계하기 위한 기본원칙은 Fig. 3.1과 같이 오차보상기와 플랜트 사이의 전향경로에 적분기를 넣는 것이다. 이 그림으로부터 다음 식을 얻는다.

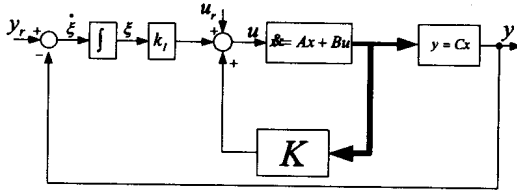


Fig. 3.1 Block diagram of optimal control

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$y = Cx \quad (3.2)$$

$$u = -Kx + k_I \xi \quad (3.3)$$

$$\xi = \int (y_r - y) dt \quad (3.4)$$

여기서 x : $n \times 1$ 상태벡터
 u : 제어입력
 y : 출력신호
 ξ : 적분기의 출력
 y_r : 기준입력신호
 A : $n \times n$ 시스템 행렬
 B : $n \times 1$ 입력행렬
 C : $1 \times n$ 출력행렬

(3.1)에 주어진 플랜트가 완전 상태 가제어이고, 계단함수의 기준입력이 $t = 0$ 일 때 작용한다고 가정하면, $t > 0$ 에 대해서 시스템의 동적방정식은 (3.1)과 (3.4)를 결합하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_r(t) \quad (3.5)$$

여기에서는 $x(\infty)$, $\xi(\infty)$, $u(\infty)$ 가 각각 상수에 접근하는 점근 안정적인 시스템을 설계하고자 한다. 따라서, 정상상태에서 $\dot{\xi}(t) = 0$ 이고 $y(\infty) = y_r$ 이므로 정상상태에서는 다음 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_r(\infty) \quad (3.6)$$

$y_r(t)$ 가 계단입력이므로, $t > 0$ 에서 $y_r(\infty) = y_r(t) = y_r$ 이다. (3.5)에서 (3.6)을 빼면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (3.7)$$

이다. 각 변수의 오차를

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) - x(\infty) \\ \xi_e(t) &= \xi(t) - \xi(\infty) \\ u_e(t) &= u(t) - u(\infty) \end{aligned} \quad (3.8)$$

와 같이 정의하면 (3.7)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (3.9)$$

여기서,

$$u_e(t) = -Kx_e(t) + k_I \xi_e(t) \quad (3.10)$$

$(n+1)$ 차의 오차벡터 $e(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}, \quad (n+1) \times 1 \text{ 벡터}$$

그러면 (3.9)와 (3.10)은 각각 다음과 같게 된다.

$$\dot{e} = A_e e + B_e u_e \quad (3.11)$$

$$\text{단, } A_e = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e = -K_e e \quad (3.12)$$

$$\text{단, } K_e = [K \quad -k_I]$$

$x(t)$, $\xi(t)$, $u(t)$ 의 정상상태 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(\infty) &= 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) &= 0 = y_r - Cx(\infty) \end{aligned}$$

이 식들을 하나의 벡터-행렬 방정식으로 결합하면

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_r \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

이 된다. 만약 행렬 A_e 의 계수(rank)가 $n+1$ 이면, 그 역행렬이 존재하고 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -y_r \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

또한, (3.3)으로부터

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_I \xi(\infty)$$

이고 적분기 출력의 정상상태 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I} [u(\infty) + Kx(\infty)] \quad (3.15)$$

(3.11)의 오차시스템에 대한 동적 방정식에서 (3.16)과 같은 2차 형식의 평가함수를 최소로 하면서 피드백 시스템을 점근적으로 안정하게 하는 LQ 제어를 (3.17)과 같이 설계할 수 있다.

한편, Q_e 와 R_e 는 상태벡터와 제어입력의 상대적인 중요성에 근거를 두고 설계자가 선정하는 하중행렬과 하중계수로서 $Q_e \geq 0$, $R_e > 0$ 인 관계를 가진다.

$$J = \int_0^{\infty} [e(t)^T Q_e e(t) + u_e(t)^T R_e u_e(t)] dt \quad (3.16)$$

$$u_e(t) = -R_e^{-1} B_e^T P_e e(t) = -K_e e(t) \quad (3.17)$$

$$\text{단, } K_e = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5] = R_e^{-1} B_e^T P_e$$

여기서, P_e 는 다음 리카치(Riccati) 방정식의 해행렬이고 K_e 는 피드백 이득행렬이다.

$$A_e^T P_e + P_e A_e - P_e B_e R_e^{-1} B_e^T P_e + Q_e = 0 \quad (3.18)$$

(3.8)과 (3.10)을 이용하여 (3.17)을 다시 표현하면 다음과 같게 된다.

$$u = u(\infty) - k_1 x_{e1} - k_2 x_{e2} - k_3 x_{e3} - k_4 x_{e4} - k_5 x_{e5} \quad (3.19)$$

본 연구에서의 독립막대 시스템에 대한 각 파라미터를 Table 3.1과 같이 선정하고 (3.11)에 대입하면 시스템행렬 A_e 와 입력행렬 B_e 및 출력행렬 C_e 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5231 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 55.3557 & 46.9609 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3.7778 \\ 0 \\ -12.3862 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_e &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (3.20)$$

제어기 설계에 있어서는 Table 3.2와 같은 제한치를 설정하고 바라는 적절한 응답이 되도록 하중행렬 Q_e 와 하중계수 R_e 를 시행착오에 의해 다음과 같이 선정하였다.

Table 3.1 Parameters of an Inverted Pole System

Parameters	Value(Unit)
K_g	3.7
K_m	0.00767 [V/rad/s]
l	0.305 [m]
m	0.21 [kg]
M	0.455 [kg]
R_d	2.6 [Ω]
r_d	0.00635 [m]
g	9.8 [m/ s ²]

Table 3.2 Design specifications of the control system

오버슈트	5[%] 이하
도달시간	2[초] 이하
정상편차	1[%] 이하
제어입력	$-15 \leq u \leq 15$ [V]

$$Q_e = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$R_e = [1] \quad (3.22)$$

다음으로 Riccati 방정식의 해행렬 P_e 가 정정 대칭행렬로 존재하는지 확인한다. 정정 대칭행렬 P_e 가 존재하면 이 시스템은 안정한 시스템이다. 행렬 A_e, B_e, Q_e, R_e 를 (3.19)에 대입하여 리카치 방정식의 해행렬 P_e 를 구하면 다음과 같은 정정 대칭행렬이므로 이 시스템은 안정한 시스템이라고 말할 수 있다.

$$P_e = \begin{bmatrix} 8595 & 2056 & 3696 & 643 & -20448 \\ 2056 & 538 & 984 & 170 & -4484 \\ 3696 & 984 & 1834 & 312 & -7957 \\ 643 & 170 & 312 & 54 & -1393 \\ -20448 & -4484 & -7957 & -1393 & 63958 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

또는, 상태 피드백 제어시스템의 고유값은 $-50.9994, -3.5016 \pm 4.4869j, -4.6909 \pm 1.1092j$ 로서 실수부가 모두 음의 값이므로 안정한 시스템인 것을 알 수 있다. 앞에서 구한 행렬 R_e, B_e 및 P_e 를 최적제어법칙의 (3.17)에 대입하면 다음과 같은 제어기의 이득 K_e 를 구할 수 있다.

$$K_e = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ -k_f] = [-202.3 \ -69.1 \ -142.7 \ -25.2 \ 316.2] \quad (3.24)$$

Fig. 3.2는 이렇게 구성한 도립막대에 대한 최적

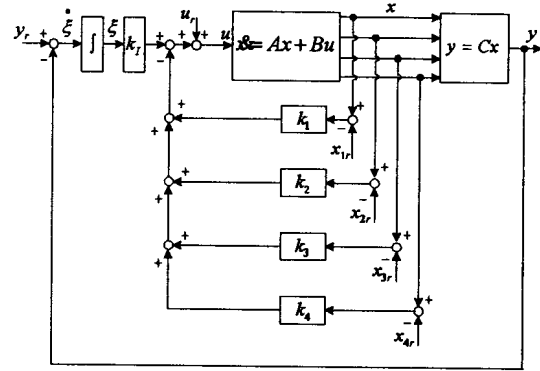


Fig. 3.2 Block diagram of optimal control for inverted pole system

제어 시스템을 나타내고 있으며, $x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}, x_{4r}$ 등은 각각 x_1, x_2, x_3, x_4 의 정상상태 값이다.

IV. 모의실험 및 결과 고찰

본 장에서는 앞장에서 설계한 LQ 제어기에 대해 컴퓨터 모의실험을 실시하며 그 성능을 고찰한다. 첫 번째는 계단상의 기준입력 변화에 대한 응답의 추종성능을, 두 번째는 외부 충격과 같은 외란에 대한 응답특성을, 세 번째는 막대의 길이변화로 야기되는 파라미터 변화에 대한 응답특성을, 네 번째는 외란과 파라미터 변화가 동시에 있을 경우에 대한 응답특성에 대하여 모의 실험을 각각 행하였다.

4.1 계단상의 기준입력 변화에 대한 검토

제어시스템의 추종성능을 알아보기 위하여 계단상의 기준입력을 변경시켜 보았다. 제어 시작과 동시에 초기위치 0[m]에서 오른쪽 방향으로 목표위치 1[m]의 기준입력을 가하였다.

Fig. 4.1은 계단상의 기준입력에 대한 LQ 제어기에 의한 응답곡선으로 (a)는 대차의 위치를, (b)는 막대의 흔들림 각도를, (c)는 구동모터에 인

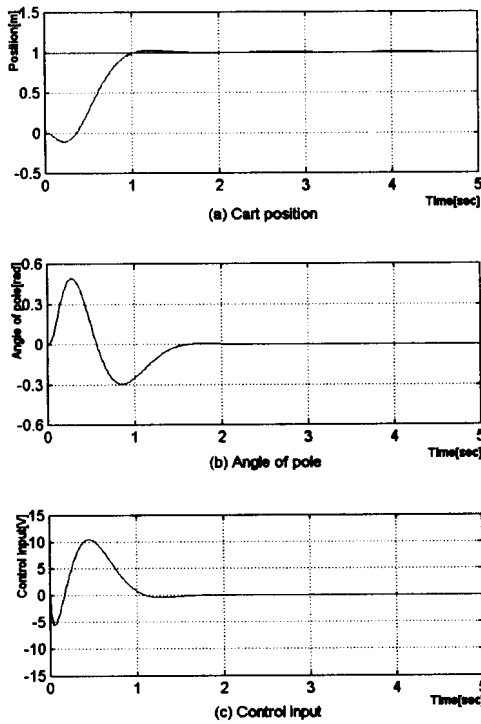


Fig. 4.1 Step response and control input using LQ controller

가되는 제어입력인 전압을 각각 나타내고 있다. (a)를 보면 초기각도가 0[rad]인 상태에서 대차에 오른쪽으로 힘을 가하면 막대가 넘어지기 때문에 우선 힘을 왼쪽으로 가하여 막대를 오른쪽으로 기울어지게 한 후에 오른쪽으로 힘을 가하여 대차를 오른쪽으로 움직이고 있다는 것을 알 수 있다. 계속 오른쪽으로 움직이면 각도는 다시 0 [rad]으로 되고, 이 부근의 시점부터 오버슈트를 줄이기 위하여 미리 대차에 왼쪽으로 힘을 가하기 시작하여 목표치 부근에서 대차는 약간의 오버슈트를 가지면서 정상편차 없이 목표치에 추종하는 안정한 제어결과를 나타내고 있다. (b)를 보면 이동 중의 최대 흔들림 각은 대략 0.49[rad]이며 흔들림 각도가 0[rad]으로 되는 시간은 1.7초이다. (c)는 구동모터에 인가되는 제어입력인 전압을 표시

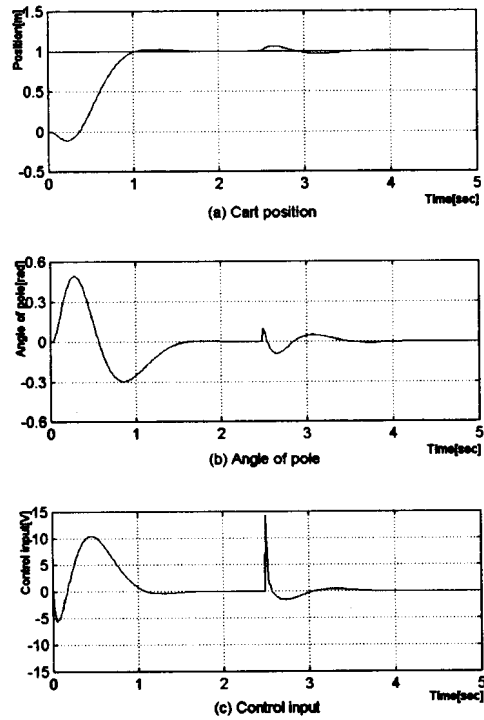


Fig. 4.2 Step response and control input using LQ controller (Disturbance +0.1[rad])

하는 것으로 -5.5[V]에서 +10.5[V]정도의 입력을 가하여 대차를 움직이고 있다.

4.2 외란에 대한 검토

외란에 대해서도 본 제어기에 의한 응답은 정상편차 없이 기준입력을 잘 추종할 수 있다는 것을 보이기 위해서 제어 시작 후 2.5초 시점에서 외부 충격과 같은 강한 외란이 진자 막대에 작용하여 흔들린다고 간주하여 +0.1[rad] 크기의 흔들림을 0.02초 동안 가하여 보았다.

2.5초에서의 외란에 의해 막대가 오른쪽으로 기울어지기 때문에 우선 대차를 오른쪽으로 움직여 막대를 왼쪽으로 기울어지게 한 후에 다시 왼쪽으로 힘을 가하여 대차를 왼쪽으로 움직이고 있다는 것을 나타낸다. 외란에 의한 최대 흔들림 각은 대략

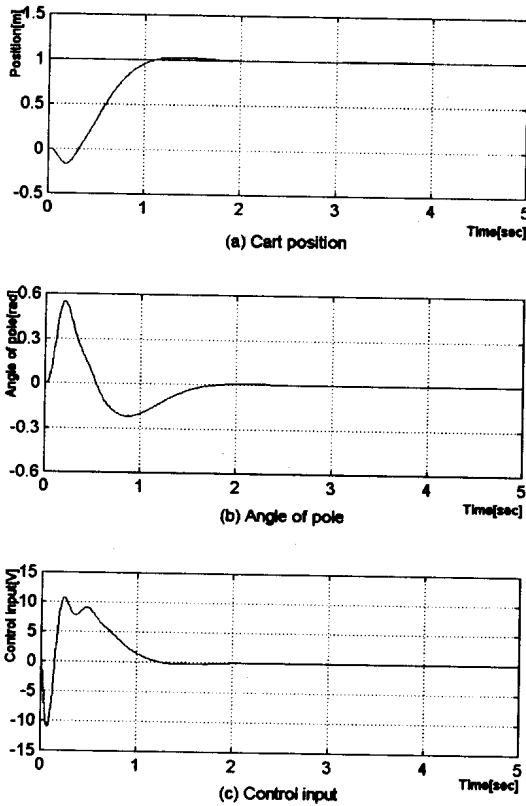


Fig. 4.3 Step response and control input using LQ controller (Pole length change +15[%])

0.1[rad]이며, 흔들림 각도가 0[rad]으로 되는 시간은 외란 투입 후 1초인 3.5초인 시점이다. 외란으로 야기되는 제어입력은 +14[V]에서 -2[V] 정도로 외란에 잘 대응하고 있다는 것을 알 수 있다.

4.3 파라미터 변화에 대한 검토

로봇 팔의 길이와 같이 파라미터 값이 변하는 시스템에 대해서도 제어기의 응답이 우수하다는 것을 보이기 위하여 막대의 길이를 +15[%] 변경시켜 보았다. (a)를 보면 제어 시작 후 약 1.15초에 목표위치에 도달하며, 큰 오버슈트나 정상편차 없이 안정한 제어결과를 얻고 있다. (b)를 보면 이동중의 최대 흔들림 각은 대략 0.54 [rad]

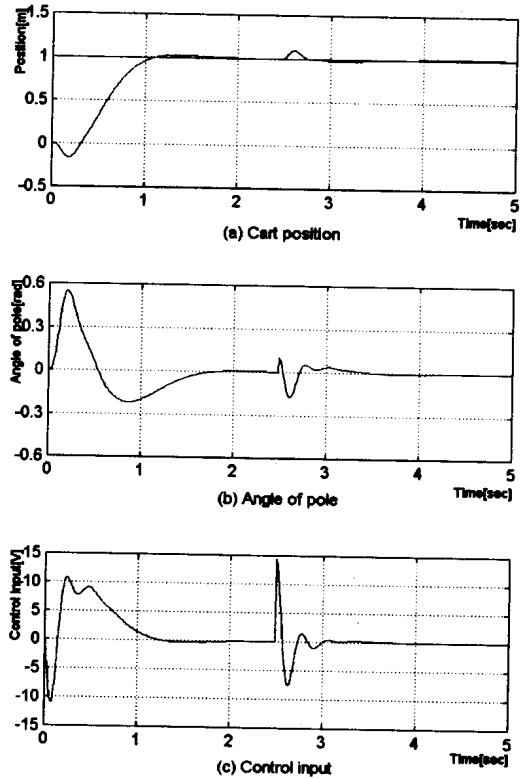


Fig. 4.4 Step response and control input using LQ controller (Pole length change +15[%], Disturbance +0.1[rad])

이며 흔들림 각도가 0[rad]으로 되는 시간은 2.6초이다. (c)는 구동모터에 인가되는 제어입력인 전압을 표시하는 것으로 -10.5[V]에서 +10.5[V] 정도의 전압을 가하여 대차를 움직이고 있다.

4.4 파라미터 변화와 외란에 대한 검토

일반적으로 제어시스템은 파라미터의 값이 변하면서 동시에 외란이 가해질 수도 있다. 따라서, 시스템의 파라미터 값의 변화와 외란에 대해서도 강인하다는 것을 보이기 위해서 막대의 길이를 +15[%] 변경시키고 제어 시작 후 2.5초 시점에서 +0.1[rad] 크기의 흔들림 외란을 0.02초 동안 가했다. 제어 시작 후 약 1.15초에 목표

위치에 도달하며, 큰 오버슈트나 정상편차 없이 안정한 제어결과를 얻고 있다. 2.5초 시점에서의 외란에 대해서는 1.0초 후인 3.5초에 목표위치에 도달하며 큰 오버슈트나 정상편차 없이 안정한 제어결과를 얻고 있다. 이동중 막대의 최대 흔들림 각은 대략 $-0.18[\text{rad}]$ 이며, $0[\text{rad}]$ 으로 되는 시간은 3.5초이다. 구동모터에 인가되는 제어입력인 전압은 $-11[\text{V}]$ 에서 $+14.3[\text{V}]$ 의 범위 내에서 변하고 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 대차의 이송효율을 높이기 위해서 대차를 가능한 고속으로 주행시키고, 대차가 목표위치에 도달했을 때 독립막대의 흔들림을 가능한 빨리 제어하는 LQ 제어기의 설계 기법을 제안하였으며 모의실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 제안한 LQ 제어기는 계단상의 목표위치 변경에 대하여 추종성능이 양호하며, 빠른 응답특성을 가진다.
- 제안된 LQ제어기는 외란과 막대의 길이변화로 야기되는 시스템의 파라미터 변화에 대해서도 적응성이 있고 강인하다.

이와 같은 결과를 종합해볼 때, 본 논문에서

제안한 독립진자의 LQ제어기를 좀 더 개선하면 로켓이나 보행로봇의 자세 제어나 컨테이너 크레인의 흔들림 방지에 응용할 수 있을 것이라 생각한다.

참 고 문 헌

- [1] S. Mori, H. Nishimura and K. Furuta, "Control of Unstable Mechanical System, Control of Pendulum", Int. J. CONTROL, Vol.23, No.5, pp. 673-692, 1976.
- [2] D. L. Kleinman, "On an iterative technique for Riccati equation computation", IEEE Trans. Autom. Contr.
- [3] D. L. Kleinman, "An easy way to stabilize a linear constant system", IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.15, No.6, pp.692-699, 1970.
- [4] Q. Feng and K. Yamafuji, "Design and simulation of control systems of an inverted pendulum", Robotica, Vol.6, pp.235-241, Mar. 1987.
- [5] B. Bavarian & B. F. Wyman and H. Hemani, "Control of the constrained planar simple inverted pendulum", Int. J. Control, Vol.37, NO.4, pp.741-753, 1983.