

## 두꺼운 판의 전단 Warping 영향에 대한 연구

### A Study On the Effect of Transversal Warping in Thick Plate

이 상 갑\*, 최 원 준\*\*

S. G. Lee and W. J. Choi

#### 요 약

Mindlin 판이론에 바탕을 둔 두꺼운 판의 굽힘문제에 대한 유한요소 개발에 많은 연구가 수행되어 왔다. 두꺼운 판의 전단변형을 고려하기 위하여 주로 근사적인 일정전단회전각이론(CSAT)을 사용하여 왔지만, 두께가 두꺼워질수록 단면의 전단변형의 영향을 효과적으로 고려할 수 없을 것이다. 판 단면의 워핑(warping)을 가능한 정확하게 나타내는 것이 바람직할 것이다.

본 논문은 전단변형과 전단워핑의 영향을 고려한 새로운 판의 이론을 전개하고, Mindlin 판이론에 의한 결과와 비교·검토하기 위하여 다양한 파라미터 연구를 수행하여 두꺼운 판에 대한 전단변형과 전단 워핑의 영향을 좀 더 깊이 고찰하고자 한다.

#### Abstract

An enormous amount of efforts has been devoted to the development of finite elements for the bending problem of thick plates, especially based on Mindlin plate theory. Here, an approximate Constant Shear Angle Theory is usually used to take a transverse shear deformation of thick plate into consideration, which cannot be effectively considered the influence of transversal warping of cross-section with an increase of thickness. It might be the best way to represent the exact cross-sectional warping of the plate.

The overall objective of this study is to develop a new formulation of plate including shear deformation and transversal warping, to perform extensive parametric studies comparing its results with those from Mindlin plate formulation, and to gain further insight into the influence of shear deformation and transversal warping of thick plate.

\* 한국해양대학교 조선공학과

\*\* 대우조선(주) GAS선 사업팀

## 1. 서 론

판(plate)은 선박 및 해양 구조물의 중요한 구조 요소로서, 이의 이론과 유한요소 개발은 아직 계속되고 있고, 앞으로도 개선의 여지가 많은 분야이기도 하다. 지금까지의 연구결과는 크게 나누어 Kirchhoff 판 이론[1,2]과 Mindlin 판 이론[3-6]에 근거한 요소들에 관한 것으로, 70년대 이후에는 전단변형(shear deformation)을 근사적으로 고려한 Mindlin 판 이론에 바탕을 둔 요소 개발과 해석 방법등에 더 많은 연구가 수행되어 왔다[3-6].

두꺼운 판일 경우 전단변형은 처짐거동에 상당한 영향을 미친다. 전단변형에 의하면 판의 두께 방향으로의 전단응력의 분포는 포물선의 분포를 나타낼 뿐 아니라, 상하면에서는 전단응력이 존재하지 않는다. 그러나 기존의 Mindlin 판 이론에 의한 요소들은 이러한 조건을 만족시키지 못하고 있으므로 판이 두꺼워 질수록 전단변형에 의한 단면의 전단 워핑(warping)의 영향을 효율적으로 나타내지 못하고 있다. 곡면으로 된 단면의 워핑형상을 기존의 Mindlin 판 이론에 의해 근사적인 평면 단면으로 나타내는 것보다, 가능한 한 정확한 단면의 워핑형상을 구하는 것이 최선의 방법일 것이다.

두꺼운 보(beam)의 전단변형에 의한 단면의 전단 워핑에 대해서는 잘 알려져 있고, 이론과 요소도 잘 개발되어 있다[7-10]. 보의 Saint Venant 문제의 변위장(displacement field)에 대한 정확해(exact solution)[11,12]를 일반화된 변형기하학 변수(generalized kinematic variable)들에 대하여 선형화 시킴으로서, 전단 워핑의 영향을 보다 정교하게 고려할 수 있는 변형기하학 가정(kinematic hypothesis)을 얻을 수 있다 [10]. 전단 워핑은 회전된 단면에 미소 중첩되어 단면의 워핑을 나타낸다. 이와 같은 보의 선형이론을 판의 변위장에 적용함으로써 판의 전단변형으로 인한 전단 워핑을 보다 정확하게 나타낼 수 있을 것이다.

Mindlin 판 이론에 의한 변위장을 통상 수치

해석에 많이 사용되는 Von Karman 가정하의 정식화를 통한 결과의 타당성은 많은 논문[4,5]에서 검증되어 있다. 방향 도함수(directional derivative) 공식을 이용하여 변분형(variational form)으로 된 약세형(weak form) 평형방정식(equilibrium equation)을 중간상태(intermediate configuration)에서 선형화(linearization)함으로써 비선형 유한요소해석에 적합한 증분형 평형방정식을 구할 수 있다[14]. 본 논문에서는 제안한 판 이론에 의한 변위장을 완전 비선형 정식화(fully nonlinear formulation)하고, 제안한 판의 변위장의 전단 워핑의 영향을 고찰하여 그의 적합성과 우수성을 보이고자 한다.

## 2. 변위장

### 2.1 보의 변위장

$x_1$ 축과 부분적으로 매끈한 경계  $\partial\Omega$ 와 임의의 단면  $\Omega$ 를 갖는 직선보의  $x_1-x_2$ 대칭면에서 자유단에 집중하중이 작용하는 Saint Venant 문제의 정확해[11,12]를 일반화된 변형기하학 변수들에 대하여 선형화하면, 전단 워핑의 영향을 보다 현실적으로 고려할 수 있는 아래와 같은 보의 변위장을 구할 수 있다 [10].

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \bar{u}_1(x_1) \\ &\quad -x_2 \bar{\varphi}(x_1) - \kappa \psi(x_2, x_3) \bar{\beta}(x_1) \\ u_2(x) &= \bar{u}_2(x_1) \\ &\quad + \nu \{g(x_2, x_3) \bar{\varphi}'(x_1) - x_2 \bar{u}_1'(x_1)\} \\ u_3(x) &= \nu \{x_2 x_3 \bar{\varphi}'(x_1) - x_3 \bar{u}_1'(x_1)\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기에서  $\bar{u}_1(x_1)$ ,  $\bar{u}_2(x_1)$ 는 각각  $x_1, x_2$ 축 방향의 평균변위(mean displacement)이고,  $\bar{\varphi}(x_1)$ 와  $\bar{\beta}(x_1)$ 는 Fig. 1에서와 같이 각각 임의 단

면  $\Omega(x_1)$ 에서  $x_3$ 축에 대한 평균회전(mean rotation)과 평균전단각(mean shearing angle)으로서 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\bar{\beta}(x_1) = \bar{u}_2'(x_1) - \bar{\varphi}(x_1) \quad (2.2)$$

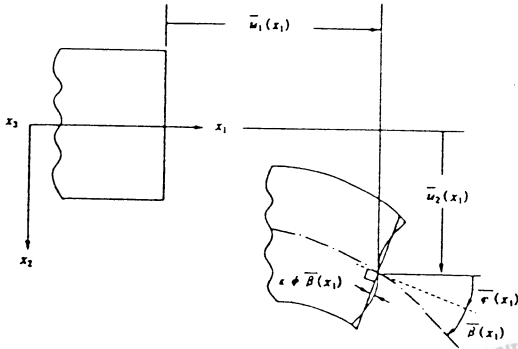


Fig. 1 Average rotation and warping distribution of beam

Fig. 1에서와 같이 식(2.1)<sub>1</sub>의 미소전단 워핑 변형  $\kappa \psi(x_2, x_3) \bar{\beta}(x_1)$ 은 평균회전단면에 수직하게 중첩되며, 워핑함수  $\psi(x_2, x_3)$ [10]와 전단계수(shear coefficient)  $\kappa$  [7]는 다음과 같다.

$$\psi(x_2, x_3) = \frac{\Omega}{2(1+\nu)I_2} \left( \kappa - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \kappa d\Omega - \frac{x_2}{I_2} \int_{\Omega} x_2 \kappa d\Omega \right) \quad (2.3)$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} d\Omega}$$

식 (2.3)의  $\kappa(x_2, x_3)$ 는 Love의 휨함수(flexure function) [11]로서 다음과 같은 Poisson 방정식과 경계조건을 만족한다.

$$\Delta \chi = -2x_2, \quad x_2, x_3 \in \Omega$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\nu}{2} \left( (x_2^2 - x_3^2)n_2 + 2x_2x_3n_3 \right) \quad (2.4)$$

여기에서  $n = \{n_1, n_2, n_3\}$ 은 단면의 경계에 수직한 방향이다. 그리고 식(2.1)<sub>2</sub>의  $g(x_2, x_3)$ 는 다음과 같다.

$$g(x_2, x_3) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_3^2 - \frac{I_2 - I_3}{\Omega})$$

$$I_a = \int_{\Omega} x_a^2 d\Omega, \quad a = 2, 3 \quad (2.5)$$

## 2.2 판의 변위장

보의 변위장 (2.1)의 변형기하학의 가정을 판에 확장하여, 본 논문에서는 Fig. 2에서와 같은 두께가  $h$ 이고  $x_1-x_2$ 를 중립면으로 하는 판의 변위장을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} u_a(x) &= \bar{u}_a(x_1, x_2) - x_3 \bar{\varphi}_a(x_1, x_2) \\ &\quad - \kappa \psi(x_3) \bar{\beta}_a(x_1, x_2) \quad (2.6) \\ u_3(x) &= \bar{u}_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

여기에서  $a = 1, 2$ 이고, 보의 변위장에서와 같이  $\bar{u}_a(x_1, x_2)$ ,  $\bar{\varphi}_a(x_1, x_2)$ 와  $\bar{\beta}_a(x_1, x_2)$ 는 다음과 같이 정의되고 Fig. 2에서와 같은 기하학적인 의미를 갖는다.

$$\bar{u}_a(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_a(x) dx_3$$

$$\bar{\varphi}_a(x_1, x_2) = -\frac{1}{I} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 u_a(x) dx_3 \quad (2.7)$$

$$\bar{\beta}_a(x_1, x_2) = \bar{u}_{3,a}(x_1, x_2) - \bar{\varphi}_a(x_1, x_2)$$

여기서  $I = h^3/12$ 이다.

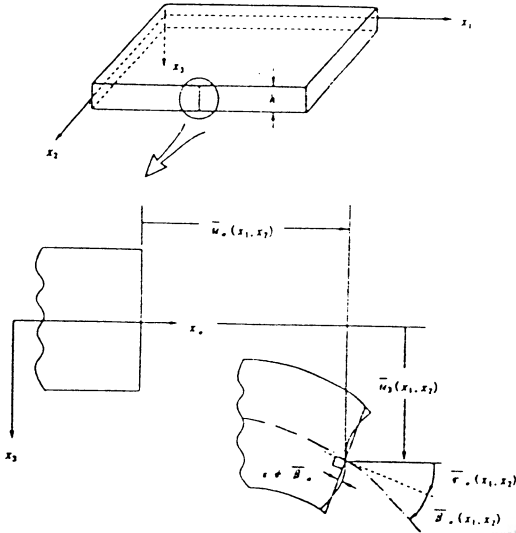


Fig. 2 Kinematic assumption of plate

판의 워핑함수  $\psi(x_3)$ 는 식(2.7)에서의  $\bar{u}_\alpha(x_1, x_2)$ 와  $\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)$ 에 대한 정의에 의하여 아래의 식 (2.8)과 같은 직교성의 관계(orthogonality relations)를 만족해야 한다.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi(x_3) dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \psi(x_3) dx_3 = 0 \quad (2.8)$$

미소전단워핑  $\kappa \psi(x_3) \beta_\alpha(x_1, x_2)$ 은 보에서와 같이 평균회전단면에 수직으로 중첩되며, 워핑함수  $\psi(x_3)$ 는 식 (2.6)으로 부터 다음과 같은 3차 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$\psi(x_3) = \frac{2}{h^2} x_3^3 - \frac{3}{10} x_3 \quad (2.9)$$

그리고 판의 변위장 (2.6)에서  $\kappa$ 는 전단계수로

서 판의 상하면에서 두께 방향으로의 전단응력이 0이라는 조건으로 부터 구할 수 있으며 5/6이 된다.

$$\bar{u}_\alpha(x_1, x_2), \bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2), \bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2)$$

와  $\bar{u}_3(x_1, x_2)$ 는 위에서 언급한 물리적인 의미의 예, 모두  $x_1-x_2$  중립면에서 정의되고, 선형독립 변수로 취급할 수 있으므로 C<sub>0</sub> 연속성을 가진 보간함수(interpolation function)를 사용할 수 있다. 이 논문에서 제안한 판의 변위장 (2.6)은 7 자유도(degree of freedom)로 나타낼 수 있고,  $\bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2)$  항이 제외된 5 자유도의 변위장은 기존의 Mindlin 이론에 따른 것이다.

### 3. 평형 방정식

두께가  $h$ 이고 부분적으로 매끈한 경계  $\partial\Omega$ 를 가지는 평면  $\Omega$ 인 평판에서, 시간  $t=0$ 일 때의 기준상태  $B \equiv (0, L) \times \Omega \subset \mathbb{R}^3$ 에서의 좌표계는  $X$ 로 정의하고, 시간  $t$ 인 현재상태에서의 공간좌표계는  $x$ 로 나타낸다. 변형사상(deformation map)은  $\Phi: B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 로, 그리고 변형구배(deformation gradient)는  $F = \partial\Phi/\partial X$ 로 나타낸다. 질점  $X \in B$ ,  $x \in \Phi(B)$  들은 각각 그들의 위치벡터  $X$ 와  $x$ 로서 표현한다. 변형사상은 Lagrangian 수식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi = X + u(X) \quad (3.1)$$

여기에서 변위  $u(X)$ 는 변위장 (2.6)이다.

임의의 경계조건을 만족하는 허용변분(kinematically admissible variation)  $\eta$ 에 대하여 다음과 같이 약세형(weak form)으로 평형 방정식을 표현할 수 있다 [15].

$$\begin{aligned}
 G(\Phi, \eta) &\equiv \int_B P : (DF \cdot \eta) dV \\
 &- \int_B \rho_o B \cdot \eta dV \\
 &- \int_{\partial B_i} \bar{\tau} \cdot \eta dS = 0 \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

여기에서  $P$ 는 제1 Piola-Kirchhoff 응력텐서 (stress tensor),  $\rho_o$ 는 기준상태에서의 밀도이고,  $B$ 는 체적력이다. 표면력(traction)  $\bar{\tau}$ 는 경계부분  $\partial B_i$ 에서, 변형은 경계부분  $\partial B_u$ 에서 규정된다. 즉  $\partial B_u \cup \partial B_i = \partial B$ ,  $\partial B_u \cap \partial B_i = \emptyset$ . 편의를 위해 제1 Piola-Kirchhoff 응력텐서는 제2 Piola-Kirchhoff 응력텐서 ( $S = F P$ )로 대체하고, 이에 대응되는 Green-Lagrangian 변형도텐서  $E = (F'F - 1)/2$ 를 사용한다. 그리고  $DF \cdot \eta$ 는 변형구배의 변분으로서 다음과 같은 방향 도함수(directional derivative)의 공식 [14]을 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned}
 DF(X, u(X)) \cdot \eta &= \\
 \frac{d}{d\epsilon} [ F(X, u + \epsilon \eta) ]_{\epsilon=0} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

이 연구에서는 전단 워핑에 대한 기하학적인 면에 관심을 두고 있으므로 재료의 거동은 선형 탄성으로 한정한다. Von Karman 가정과는 달리 Green-Lagrangian 변형도텐서의 모든 고차 항을 고려하고, 방향 도함수의 공식을 이용하는 효율적인 방법으로 기하학적으로 완전한 비선형 (fully nonlinear)의 증분방정식을 유도한다.

중간상태  $\bar{\Phi}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대한 평형방정식 (3.2)을 선형화하면 다음과 같다.

$$L[G]_{\bar{\sigma}} = \int_B (DF \cdot \eta)_{\bar{\sigma}} :$$

$$\begin{aligned}
 [ S \otimes I + F' \frac{\partial S}{\partial E} F ]_{\bar{\sigma}} : \\
 (DF \cdot \Delta u)_{\bar{\sigma}} dV + G(\bar{\Phi}, \eta) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

여기서  $I$ 은 단위 매트릭스이고,  $\Delta u: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ 는 변위증분이다. 그리고 적분항은 접선강성도 (tangent stiffness)로서, 그것의 첫째항은 기하학적인 부분이고 둘째항은 재료적인 항이다. 마지막 항은 불평형력(out-of-balance force)로서 다음과 같고,  $\bar{\Phi}$ 가 평형상태이면 없어진다.

$$\begin{aligned}
 G(\bar{\Phi}, \eta) &= \int_B P : (DF \cdot \eta)_{\bar{\sigma}} dV \\
 &- \int_{\partial B_i} \bar{\tau} \cdot \eta dS \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

식 (3.4)는 유한요소법으로 취급하기가 적당한 형태로 되어있다. 일반화된 변위  $u(X) = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2]'$ 는 절점변위  $U = [U_1, U_2, U_3, \Psi_1, \Psi_2, B_1, B_2]'$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(X) = \sum_{a=1}^N h_a(X) U_a \quad (3.6)$$

여기에서  $h_a(X)$ 는  $C_0$ 의 연속성을 갖는 보간함수이고,  $N$ 은 각 요소의 절점수이다.

판의 변위장 (2.6)과 식 (3.6)에서 변위구배 (displacement gradient)는 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\text{GRAD } u(X) = \sum_{a=1}^N B_a(X) U_a \quad (3.7)$$

여기서  $B_a(X)$ 는 식 (3.8)과 같이 주어진다.

$$B_a(X) = \begin{bmatrix} h_{a,1} & 0 & 0 & -x_3 h_{a,1} & 0 & -\kappa \psi h_{a,1} & 0 \\ h_{a,2} & 0 & 0 & -x_3 h_{a,2} & 0 & -\kappa \psi h_{a,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_a & 0 & -\kappa \psi_{,3} h_a & 0 \\ 0 & h_{a,1} & 0 & 0 & -x_3 h_{a,1} & 0 & -\kappa \psi h_{a,1} \\ 0 & h_{a,2} & 0 & 0 & -x_3 h_{a,2} & 0 & -\kappa \psi h_{a,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_a & 0 & -\kappa \psi_{,3} h_a \\ 0 & 0 & h_{a,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{a,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

위의 결과를 사용하여 선형화된 평형방정식 (3.4)는 증분 절점변위  $\Delta U$ 에 대하여 다음과 같은 표준적인 이산화 문제(discrete problem)로 귀납된다.

$$K_i \Delta U = f_i \quad (3.9)$$

여기에서 접선강성도  $K_i$ 와 불평형력  $f_i$ 는 모든 요소의 합으로서 다음과 같다.

$$K_i = \sum_e \int_B B'_i [ S \otimes I + F' D^e F ] {}_e B dV$$

$$f_i = F_i - \sum_e \int_B B'_i : P {}_e dV \quad (3.10)$$

여기서  $F_i$ 는 현재의 작용 절점하중 벡터이다.

본 논문에서는 8 절점의 Serendipity 판 요소를 사용했으며, 두께 방향은 Gauss-Lobatto 적분법, 평면에서는 shear locking을 방지하기 위하여 감차적분법(reduced integration -  $2 \times 2$  Gaussian 적분법)을 사용하였다. Gauss-Lobatto 적분법에는 Mindlin 이론에 의한 요소에는 3점, 제안한 판 이론에 의한 요소에는 5점의 Gauss 적분점을 사용하였다.

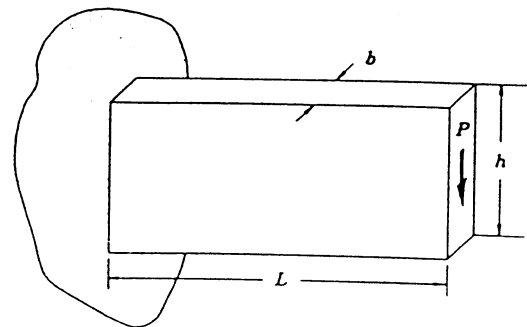
#### 4. 수치해석 및 고찰

수행한 수치해석 결과는 Mindlin 판 이론에 의한 결과와 비교, 검토하였다. 먼저 두께가 두꺼운 판으로 이루어진 외팔보(cantilever beam

with deep plate)의 두께방향으로 나타나는 전단응력의 분포를 살펴봄으로서 제안한 판의 변위장의 적합성을 보였다. 다음에 정방형판(square plate)의 두께에 따른 전단위평의 효과를 조사함으로써, Mindlin 판 이론에 대한 제안한 판의 이론의 우수성도 보였다.

#### 4.1 두께가 두꺼운 판으로 이루어진 외팔보

Fig. 3과 같이 두께가 두꺼운 판으로 이루어진 외팔보의 자유단에 하중이 작용할 때, 고정단에 가까운 곳( $L = 0.42m$ ), 중간에 가까운 곳( $L = 5.58m$ )과 자유단에 가까운 곳( $L = 9.58m$ )에서의 두께 방향으로의 전단력 분포를 각각 고정단에서 위평을 구속한 경우와 구속하지 않은 경우에 대하여 Fig. 4에 나타내었다. 보의 길이방향으로 5개의 요소를 사용하였다.



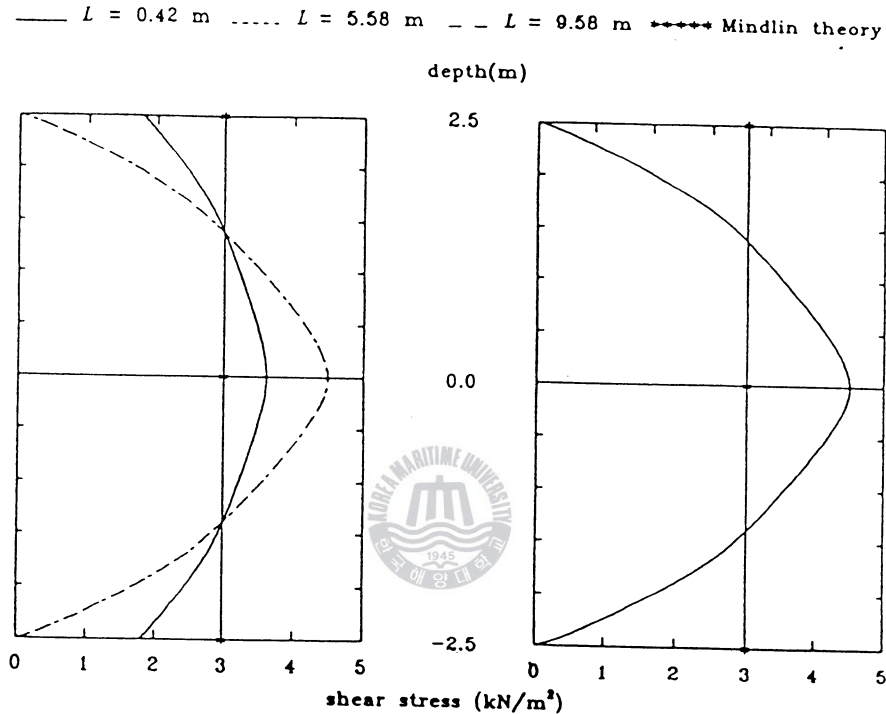
$$L = 10.0 \text{ m} \quad b = 1.0 \text{ m} \quad h = 5.0 \text{ m}$$

$$P = 15.0 \text{ kN} \quad E = 200 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3$$

Fig. 3 Cantilever beam with deep plate

Fig. 4에서 보는 바와 같이 전반적으로 Mindlin 판 이론에 의한 전단력 분포는 예상한 바와 같이 두께 방향으로 일정하지만, 제안한 판

이론의 경우에는 전단력 분포가 포물선의 형태가 됨을 볼 수 있다. Fig. 4(a)는 고정단에서 워핑이 구속된 경우로서 고정단에 가까운 곳(L =



(a) warping fixed

(b) warping free

Fig. 4 Shear stress distribution through thickness of cantilever beam

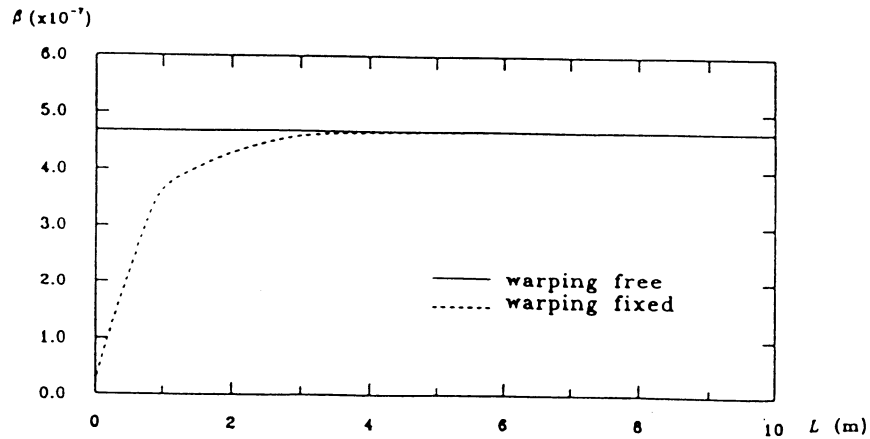


Fig. 5 Warping variable distribution along the length of cantilever beam

0.42m)을 제외하면 전단력은 판의 상하면에서 0이 되고 있다. 그리고 Fig. 4(b)는 워핑이 구속되지 않은 경우로서 보의 길이 방향으로 전단력의 분포가 모두 일치하고 또한 판의 상하면에서는 0이 되고 있다.

Fig. 5에서는 보의 길이방향으로 워핑 변수인 평균전단각  $\beta$ 의 분포를 나타내고 있다. 고정단에서 워핑이 구속되지 않은 경우에는 평균전단각이 보의 전 길이에 걸쳐 일정하나, 워핑이 구속된 경우에는 고정단 부근에서 급격한 증가가 일어나 자유단으로 가면서 워핑이 구속되지 않은 경우와 일치하게 됨을 볼 수 있다. 이것이 워핑이 구속된 경우에 고정단 가까운 부분에서의 전단력이 판의 상하면에서 0이 되지 않는 이유이다.

본 논문에서 제안한 판 이론에 의하면 전단력 분포가 판의 두께방향으로 포물선이 되고 판의 상하면에서 0이 되므로 제안한 판 이론이 Mindlin 판 이론보다 더 정확하게 판의 전단변형을 표현할 수 있을 것이다.

## 4.2 정방형판

4변 모두 단순지지(simply supported)또는 고정(clamped)된 정방형판(square plate)에 각각 판 중앙에 집중하중과 판 전체에 균일분포하중이 작용하는 경우에 대하여 전단 워핑의 영향을 고려해 보았다. Fig. 6에서와 같이 대칭임을 감안하여 판의 1/4분면에 대하여 25개의 요소(5×5 mesh)를 사용하였다.

Fig. 7과 Table 1은 단순지지된, Fig. 8과 Table 2는 고정된 판에 대하여 각각 변의 길이에 대한 두께의 비( $h/a = 0.01 - 0.50$ )에 따른 중앙점의 처짐을 정규화하여(normalized) 나타낸 것이다. 그리고 집중하중과 분포하중에 대하여 각각 Fig. 7과 8, Table 1과 2에서 (a)와 (b)로 구분하여 나타내었다.

앞으로의 수치해석에서는 Mindlin 판 이론에 의한 처짐과 같은 결과들은 Mindlin theory로,

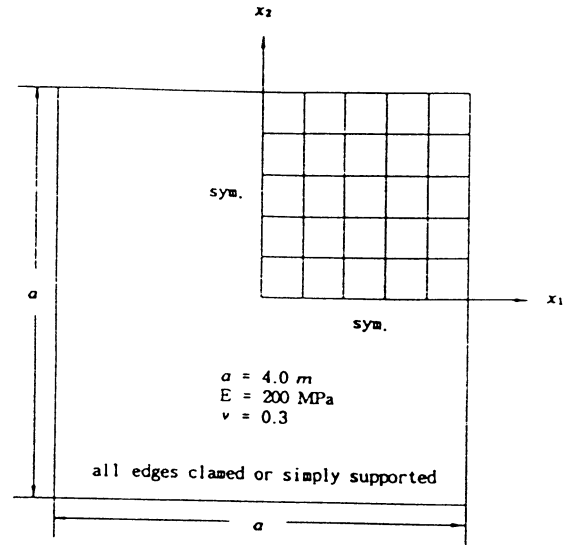


Fig. 6 Geometry and material properties of square plate

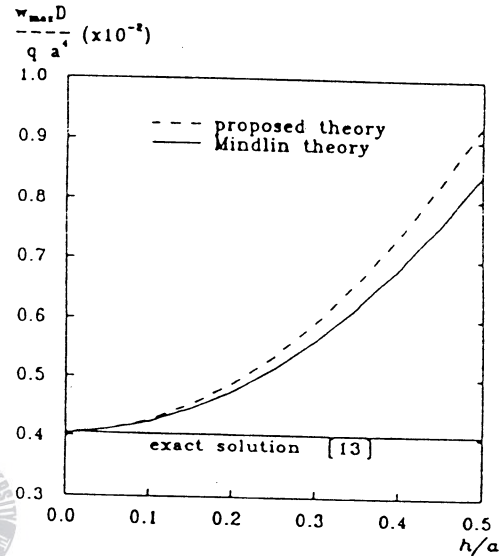
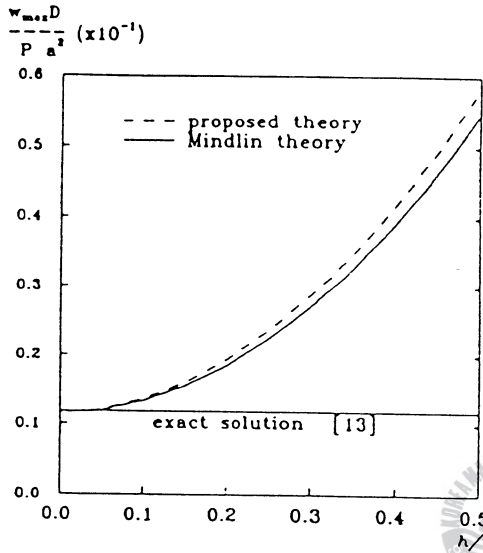
그리고 제안한 판 이론에 의한 결과들은 proposed theory로 구분하여 Figure와 Table에 표기하기로 한다. 전단변형을 고려하지 않는 Kirchhoff 이론에 의한 정확해 [13]를 정규화하면 Fig. 7과 8에서와 같이 수평직선으로 나타나는데, 판의 두께가 얇은 경우에는 예상한 바와 같이 Mindlin theory와 proposed theory의 처짐들과 일치하고 있다. 두께가 두꺼워질수록 Mindlin theory와 proposed theory의 정규화된 처짐들은 증가하고 있고, 또한 그들 사이의 차이도 커지고 있음을 볼 수 있다. 두께 증가에 대한 이들 차이의 경향을 알아보기 위해 Mindlin theory의 처짐에 대한 proposed theory의 처짐의 비율(ratio, %)을 Table 1과 2에 나타내었고, 또한 도식화하여 Fig. 9에 나타내었다.

단순지지된 판의 경우에는 Fig. 7(a) 집중하중과 Fig. 7(b) 분포하중에서 보는 바와 같이 전반적인 경향은 비슷하지만, 집중하중이 작용하는 경우보다 분포하중이 작용하는 경우가 판



의 두께가 두꺼워질 수록 Mindlin theory의 처짐과 proposed theory의 처짐과의 차이가 점차 커지고 있다. 즉, Table 1(a),(b)와 Fig. 9(a)에서

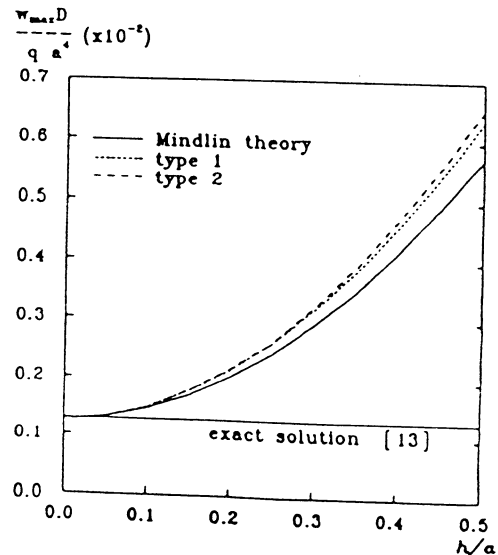
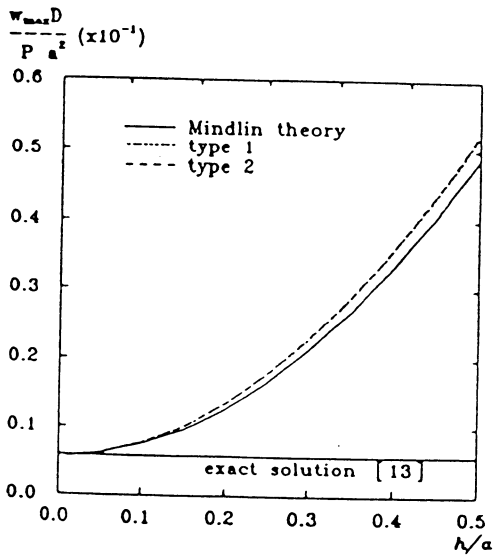
보는 바와 같이 집중하중일 경우에는 판이 두꺼워질수록 이들 처짐의 비율의 증가가 둔화되지만, 분포하중인 경우에는 지속적으로 증가하는



(a) Concentrated loads

(b) Distributed loads

Fig. 7 Midpoint deflection of simple supported rectangular plate



(a) Concentrated loads

(b) Distributed loads

Fig. 8 Midpoint deflection of clamped rectangular plate

Table 1 Midpoint deflection of simply supported rectangular plate

$h/a$	Mindlin theory ( $10^{-1}$ )	proposed theory ( $10^{-1}$ )	ratio %
0.01	0.116	0.116	0.03
0.05	0.120	0.121	0.58
0.10	0.133	0.136	1.95
0.15	0.155	0.160	3.36
0.20	0.185	0.193	4.54
0.25	0.224	0.236	5.45
0.30	0.271	0.288	6.05
0.35	0.327	0.348	6.30
0.40	0.392	0.418	6.53
0.45	0.465	0.496	6.60
0.50	0.547	0.583	6.56

(a) Concentrated loads

$h/a$	Mindlin theory ( $10^{-2}$ )	proposed theory ( $10^{-2}$ )	ratio %
0.01	0.406	0.407	0.02
0.05	0.411	0.412	0.21
0.10	0.424	0.427	0.13
0.15	0.446	0.454	1.76
0.20	0.476	0.490	2.91
0.25	0.516	0.537	4.17
0.30	0.564	0.595	5.46
0.35	0.621	0.663	6.69
0.40	0.687	0.740	7.81
0.45	0.761	0.829	8.93
0.50	0.845	0.926	9.67

(b) Distributed loads

Table 2 Midpoint deflection of clamped plate

$h/a$	Mindlin theory( $10^{-1}$ )	proposed theory ( $10^{-1}$ )			
		type 1	ratio %	type 2	ratio %
0.01	0.056	0.056	0.18	0.056	0.07
0.05	0.061	0.061	1.32	0.061	1.27
0.10	0.074	0.077	3.65	0.077	3.61
0.15	0.096	0.101	5.42	0.101	5.54
0.20	0.127	0.135	6.64	0.135	6.77
0.25	0.166	0.178	7.18	0.178	7.41
0.30	0.214	0.229	7.35	0.230	7.68
0.35	0.270	0.290	7.34	0.291	7.75
0.40	0.335	0.359	7.23	0.360	7.68
0.45	0.408	0.437	6.98	0.439	7.53
0.50	0.490	0.523	6.75	0.526	7.33

(a) Concentrated loads

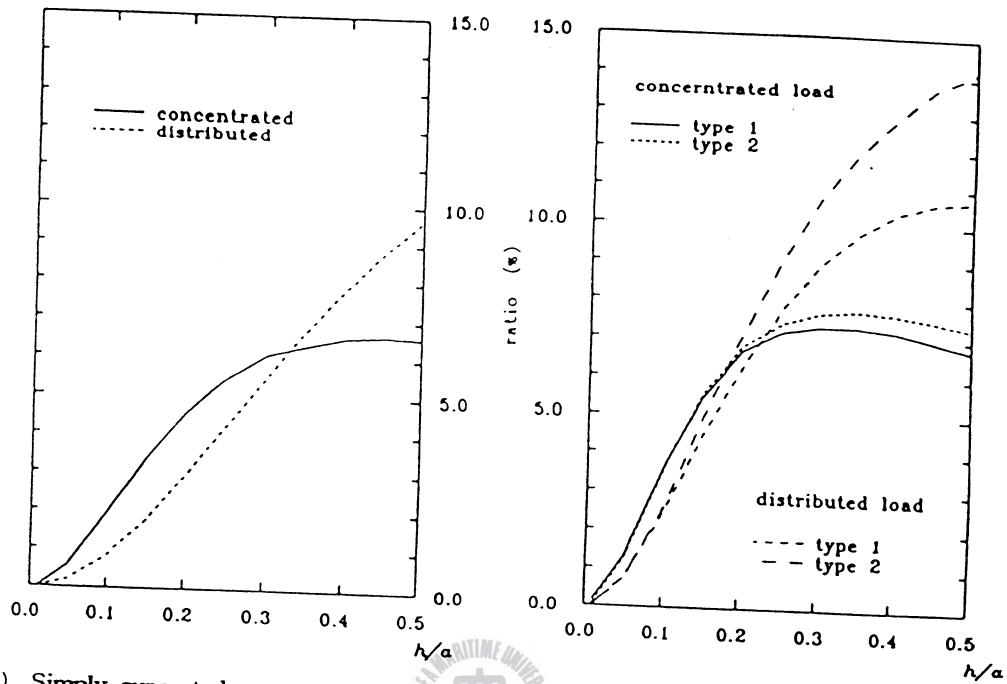
$h/a$	Mindlin theory( $10^{-2}$ )	proposed theory ( $10^{-2}$ )			
		type 1	ratio %	type 2	ratio %
0.01	0.127	0.127	0.03	0.127	0.04
0.05	0.132	0.133	0.75	0.133	0.77
0.10	0.147	0.150	2.45	0.150	2.56
0.15	0.170	0.178	4.43	0.179	4.88
0.20	0.203	0.215	6.23	0.217	7.08
0.25	0.243	0.262	7.76	0.262	9.04
0.30	0.293	0.319	8.92	0.324	10.7
0.35	0.350	0.384	9.75	0.392	11.9
0.40	0.417	0.459	10.3	0.471	12.9
0.45	0.492	0.544	10.6	0.559	13.7
0.50	0.575	0.637	10.7	0.657	14.2

(b) Distributed loads

것을 볼 수 있다. 변의 길이에 대한 두께의 비  $h/a$ 가 0.50인 경우에 Mindlin theory의 처짐에 대한 proposed theory의 처짐의 비율은 집중하중일 때는 약 6.6%, 분포하중일 때는 약 9.7% 정도이다. 판의 두께가 두꺼워 질수록 제안한 판의 이론에 따르는 경우가 전단위평의 효과를 근사적으로 고려한 Mindlin 판 이론에 의한 경우보다 처짐이 더 크게 됨을 볼 수 있다.

단순지지된 경우와는 달리 고정된 판에서는 4.1절에서 논의된 바와 같이 고정단에서의 전단 위평의 구속여부에 따른 영향도 고찰해 보기 위하여 다음 2가지 경우로 분리하였다. 즉, 지지점

에서 위평이 구속되어 있는 경우와 위평이 구속되어 있지 않은 경우로서, Figure와 Table에서 전자는 type 1, 후자는 type 2로 구분한다. Fig. 8에서 보는 바와 같이 전체적인 경향은 단순지지된 판의 경우(Fig. 7)와 비슷함을 볼 수 있다. 특히 고정단에서의 위평이 구속된 경우(type 1)는 Table 1과 2, Fig. 9(a)와 (b)에서 보는 바와 같이 거의 같은 값의 비율을 가진다는 것을 알 수 있다. 그러나 고정단에서의 위평이 구속되지 않은 경우(type 2)는 판의 두께가 두꺼워질수록 type 1보다, 또한 분포하중일 때가 더 큰 비율에 이르러 변의 길이에 대한 두께의 비  $h/a$ 가



(a) Simply supported rectangular plate

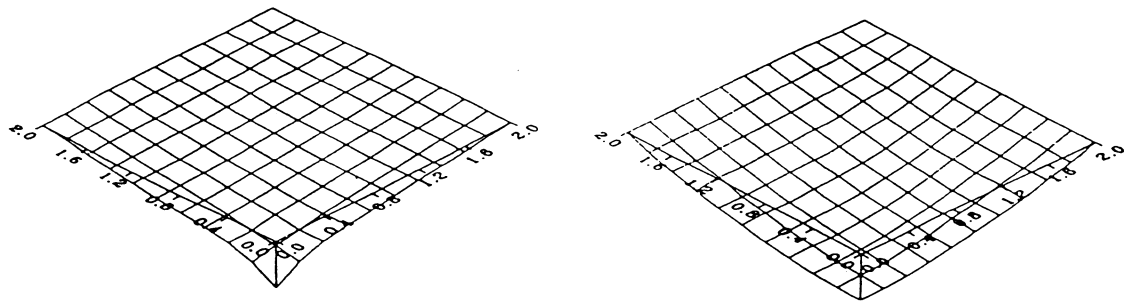
(b) Clamped rectangular plate

Fig. 9 Ratio of difference in rectangular plate

0.50인 경우에 약 14.0%가 되고 있다.

이상에서 본 바와 같이 분포하중을 받는 고정된 판에 워핑이 구속되지 않은 경우를 제외하고는 지지조건보다는 하중조건에 의해 전단 워핑의 영향을 더 받게 됨을 알 수 있다. 이러한 경향을 살펴보기 위해 판에 집중하중과 분포하중

중이 작용할때의 처짐형상을 Fig. 10에 좌표계의 원점을 판의 중앙점으로 하고 판의 1/4분면만 나타내었다. 이때 판의 두께와 처점이 같도록 집중하중과 분포하중을 작용시켰다. Fig. 10(a)에서는 집중하중을 받는 경우의 판의 처짐형상으로 집중하중이 작용하는 중앙점부근을 제



(a) Concentrated loads

(b) Distributed loads

Fig. 10 Deflection shape of square plate

외하고는 판의 굽힘이 전체적으로 완만한 반면에, Fig. 10(b)에서와 같이 분포하중을 받는 경우에는 판의 처짐이 전반에 걸쳐 고르게 일어나고 있다. 이러한 사실로 보아 집중하중인 경우보다는 분포하중인 경우가 단면의 워핑이 판 전체에 고르게 분포되어 있음을 추측케 한다. 또한 Fig. 5에서 알 수 있는 바와 같이 고정된 판의 지지변에 워핑을 구속하면 지지변 및 그 부근에서의 전단워핑이 크게 제약됨으로 지지변에서의 워핑 구속여부는 판의 처짐에 영향을 미침을 쉽게 추측할 수 있고, 특히 분포하중이 작용할 경우에 그 영향이 더욱 크다.

## 5. 결 론

보의 Saint Venant 문제의 정확한 3차원 해를 일반화된 변형기하학 변수들에 대하여 선형화하면 전단변형의 영향을 보다 현실적으로 고려할 수 있는 보의 변위장을 구할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 방법을 판에 적용하여 전단변형을 근사적으로 고려하는 기존의 Mindlin 판 이론에 비하여 보다 판의 두께방향의 전단변형의 영향을 잘 나타낼 수 있는 판의 변위장을 제시하였다. 예상한 바와 같이 전단응력은 판의 상하면에 나타나지 않고, 두께 방향으로 비선형으로 분포하고 있어 보다 현실적이다. 그리고 판의 처짐은 두께가 두꺼워질수록 Mindlin 판 이론에 의한 것에 비하여 전단 워핑에 의한 영향으로 보다 크게 잘 나타나고 있다. 이러한 점으로 미루어 제안한 판 이론에 의한 요소는 두꺼운 판은 물론이고 복합적층판의 구조해석에 보다 적합하고 우수하다고 사료된다.

## 참고문헌

- [1] Zienkiewicz, O.C., *The finite element method*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [2] Cook, R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley, New York, 1974.
- [3] Hughes, T.J.R., Cohen, M. and Haroun, M., "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engng Design*, Vol. 46, pp. 203-222, 1978.
- [4] Pica, A., Wood, R.D. and Hinton, E., "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin theory," *Computers & Structures*, Vol. 11, pp. 203-215, 1980.
- [5] Pica, A. and Wood, R.D., "Postbuckling behaviour of plates and shells using a mindlin shallow formulation," *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 759-768, 1980.
- [6] Hughes, T.J.R. and Cohen, M., "The Heterosis finite element for plate bending," *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 445-450, 1978.
- [7] Cowper, G.R., "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 33, No.2, pp. 335-340, 1966.
- [8] Hjelmstad, K.D., "Warping effects in transverse bending of thin-walled beams," *ASCE J. Engrg. Mech.*, Vol. 113 No. 6, pp. 907-924, 1987.
- [9] Lee, S.G. "Cyclic lateral-torsional buckling of short I-beams," *Ph.D. Thesis*, Dept. of Civil Engrg., University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.
- [10] Hjelmstad, K.D. and Popov, E.P., "Seismic behavior of active beam links in eccentrically braced frames," *Report No. UCB/EERC-83/15*, Uni. of California, Berkeley, 1983.
- [11] Love, A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dove Publication, New York, 1944.
- [12] Sokolnikoff, I.S., *Mathematical theory of*

- elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [13] Timoshenko, S.P. and Krieger, S.W., *Theory of plates and shells*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1982.
- [14] Pinsky, P.M., Taylor, R.L. and Pister, K.S., "Finite deformation of elastic beams," in *Proceeding IUTAM Symp.*
- on Variational Methods in Mechanics of Solids*(S. Nemat-Nasser & K. Washizu, eds.) Pergmon Press, pp.115-120, 1980.
- [15] Marsden, J.E. and Hughes, T.J.R., *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.



