

비례점성 · 히스테리시스 감쇠계에 의한 철도차량의 실험모드해석

최 문 길 · 김 의 간

Experimental Modal Analysis using Proportional Viscous · Hysteretic
Damping System on the Rolling Stock

Moon-Kill Choi · Ye-Kan Kim

ABSTRACT

In this study, the modal analysis is adopted for the investigation of vibratory characteristics of a rolling stock. A governing equation for this system is derived on a condition that the rolling stock is in proportional viscous damping and proportional hysteretic damping.

By applying this method a computational modal analysis software is developed. The validity and reliability of this method is verified by comparing the results for the above case and with those of a system having proportional viscous damping and a system having general viscous damping. A system that has non linearity, an error from the calculation may occur in the analysis. In this case, we applied the piecewise linear method to estimate the modal parameters.

1. 서 론

최근 컴퓨터의 비약적인 발전으로 인하여 계측이나 데이터 처리 기술이 발전하고, 기계의 설계에도 커다란 변화를 가져오게 되었다. 그에 따라 기계의 동적거동에 관한 특성을 좀 더 명확하게 파악하기 위하여 모드해석법이 기계설계의 여러분야에서 적용되고 있다.

모드해석이란 임의의 외력이 구조물에 작용하였을 때 어떤 주파수에서 진동의 발생 정도를 해석적인 방법이나 실험적인 방법에 의하여 분석하는 것을 말하며, 유한요소법(FEM)과

* 석사과정 기계공학과 기계공학 전공

** 기계시스템공학부 부교수

실험모드해석법(experimental modal analysis)으로 대별할 수 있다.

유한요소법의 경우에는 계의 감쇠특성 예측, 내부기계 등을 포함한 구조물의 모델링, 경계조건설정 등의 어려움이 있어 정확도가 떨어진다. 실험모드해석은 구조물에 있어 임의의 가진점과 응답점에 대한 주파수응답함수를 측정하여 구조물의 고유진동수, 감쇠비, 진동모드 즉, 모드 특성치(modal parameter)^{1),2)}를 수치해석에 의해 구하는 방법이다.

구조물의 모드 특성치는 구조물을 비례점성감쇠계, 비례히스테리시스감쇠계, 일반점성감쇠계^{3),4)} 중의 하나로 모델링하여 주파수영역에서 편미분반복법⁵⁾으로 구하는 것이 일반적이지만, 연구대상인 전동차는 진동·소음 대책으로 방진고무 등을 사용하고 있어 감쇠특성은 점성감쇠와 히스테리시스감쇠의 양자를 포함하고 있다.

본 논문에서는 전동차가 비례점성감쇠와 비례히스테리시스감쇠를 함께 가지고 있다고 가정하여(이하 비례점성·히스테리시스감쇠계⁶⁾로 칭한다.) 운동방정식을 유도하고, 이로부터 모드 특성치를 주파수영역에서 구하는 방법을 제안한다. 이 방법을 적용해서 실험모드해석 전산프로그램을 개발하고, 이의 신뢰성과 타당성을 파악하기 위하여 비례점성감쇠계, 일반점성감쇠계를 적용하여 모드특성치를 구한 결과와 비교한다.

또한 이들 방법은 구조물이 선형이라는 조건에서 성립하므로, 구조물이 비선형성을 갖는 경우에는 해석결과에 오차가 발생하게 된다. 따라서 본 논문에서는 구조물이 비선형성을 갖는 경우에는 실험모드해석에 구분선형법을 적용하여 모드 특성치를 구하는 방법을 검토한다.

2. 비례점성·히스테리시스 감쇠계의 주파수응답함수 유도

2.1 비례점성·히스테리시스감쇠계

구조물이 비례점성감쇠와 히스테리시스감쇠를 함께 갖고 있다고 하면, 다자유도계 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + ([K] + j[D])\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

$$\{x\} = \{X\}e^{j\omega t}, \{f\} = \{F\}e^{j\omega t}, j = \sqrt{-1}$$

식(1)의 $[M], [C], [K], [D]$ 는 각각 질량행렬, 비례점성감쇠행렬, 강성행렬, 히스테리시스감쇠행렬이고 $\{x\}$ 와 $\{f\}$ 는 각각 변위와 외력의 벡터이다. 식(1)의 감쇠고유진동수와 모드감쇠율은 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 구조물이 비례점성감쇠와 비례히스테리시스감

쇠를 갖고 있다고 가정하였으므로 식(1)의 $[C]$ 와 $[D]$ 는 식(2)와 같이 $[M]$ 과 $[K]$ 의 1차 결합으로 나타낼 수 있다. 여기서 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 는 정수이다.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

$$[D] = \gamma[M] + \delta[K]$$

식(1)에서 가진력 진폭 $\{F\}=0$ 라 놓고, 식(1)에 식(2)를 대입하여 라플라스변환하면 식(3), 식(4)와 같이 정리할 수 있다.

$$s(s^2 + \alpha s + \beta)[M] + (\beta s + 1 + j\delta)[K]\{X\} = 0 \quad (3)$$

$$(\Omega^2[M] + [K])\{X\} = 0 \quad (4)$$

$$\Omega^2 = -(s^2 + \alpha s + \beta) / (\beta s + 1 + j\delta)$$

여기서 식(4)는 비감쇠 고유치문제와 같은 형태로 된다. 식(4)를 직접 해석하여 감쇠고유진동수와 모드감쇠율을 구하면, 이들의 값이 복소수로 되어 주파수응답함수를 다른 소음·진동소유해석에 응용할 때 불편하기 때문에 다음과 같이 실수화하였다.

먼저 라플라스변수 s 를 모드감쇠율 σ 와 감쇠고유진동수 ω_d 로 표현하면 식(5)와 같이 된다.

$$s = \sigma + j\omega_d \quad (5)$$

식(4)의 Ω^2 에 식(5)를 대입하고 실수부와 허수부를 분리하여 정리하면, 실수부는 식(6)으로, 허수부는 식(7)로 된다. 이들을 다시 σ 와 ω_d 로 유도하면 식(8), 식(9)와 같이 된다.

$$\sigma^2 + (\alpha + \beta\Omega^2)\sigma - \omega_d^2 + \Omega^2 = 0 \quad (6)$$

$$-2\sigma\omega_d + (\alpha + \beta\Omega^2)\omega_d + (\gamma + \delta\Omega^2) = 0 \quad (7)$$

$$\sigma = \{ \zeta\Omega - \Omega^2 g / (2\omega_d) \} \quad (8)$$

$$\omega_d^2 = \{ \Omega^2(1 - \zeta^2) - \Omega^2\sqrt{1 - (2\zeta^2 - \zeta^4 - g^2)} \} / 2 \quad (9)$$

$$\alpha + \beta\Omega^2 = 2\zeta\Omega, \quad \gamma + \delta\Omega^2 = g\Omega^2$$

ζ : 감쇠비, g : 히스테리시스감쇠계수

Ω : 비감쇠고유각진동수

여기서, 일반적인 구조물에서는 $(2\zeta^2 - g^2 - \zeta^4) \ll 1$ 의 상태를 만족하므로, 식(9)는 근사적

으로 식(10)과 같이 된다.

$$\omega_d^2 = \Omega^2 \{ (1 - \zeta^2) \pm (1 - \zeta^2 + g^2/2 + \zeta^4/2) \} / 2 \quad (10)$$

식(10)의 (±)에서 (-)를 취하면, ω_d^2 이 (-)로 되기 때문에 (+)만이 유효하다. 따라서 비례점성·히스테리시스감쇠계의 감쇠고유각진동수 ω_d 는 식(11)과 같이 되고, 이를 식(8)에 대입하면 모드감쇠율 σ 는 식(12)와 같이 된다.

$$\omega_d = \Omega \sqrt{1 - \zeta^2 + (\zeta^2/2)^2 + (g/2)^2} \quad (11)$$

$$\sigma = - [\zeta \Omega + \Omega g / \{ 2 \sqrt{1 - \zeta^2 + (\zeta^2/2)^2 + (g/2)^2} \}] \quad (12)$$

2.2 주파수응답함수

변위벡터 $\{X\}$ 를 N 자유도의 모드벡터 $\{\varphi_r\}$ ($r=1 \sim N$)의 선형결합으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \xi_r(t) \{\varphi_r\} = [\varphi] \{\xi\} \quad (13)$$

식(13)을 식(1)에 대입하고 각 항에 $\{\varphi\}^T$ 를 곱하여 정리하면 식(14)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \{ (-\omega^2 [\varphi]^T [M] [\varphi] + j\omega [\varphi]^T [C] [\varphi] + [\varphi]^T [K] [\varphi] \\ & \quad + j\omega [\varphi]^T [D] [\varphi]) \} \{\xi\} = [\varphi]^T \{F\} \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)에 고유모드의 직교성을 적용하여 정리하고, 이를 j 점의 외력에 대한 i 점의 응답을 컴플라이언스(compliance) $G_{ij}(\omega)$ 로 나타내면 식(15)와 같이 된다.

$$G_{ij}(\omega) = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ijr}}{(\Omega_r^2 - \omega^2) + j(2\zeta_r \Omega_r \omega + \Omega_r^2 g_r)} \quad (15)$$

$$A_{ijr} : \varphi_{ir} \varphi_{jr} / m_r$$

$\varphi_{ir} \varphi_{jr}$: r 차의 모드벡터, m_r : r 차의 모드질량



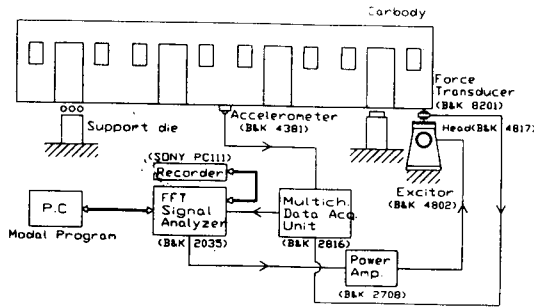
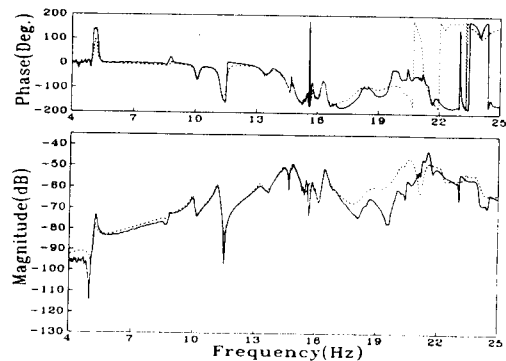


Fig. 3 Schematic diagram of experimental setup

른 코드를 사용하였다. 가진력은 힘변환기 B&K 8201 로, 진동응답은 가속도계 B&K 4381 로 측정하였다. B&K 4817 을, 증폭기로는 B&K 2708 을 사용하였다. 가속도계는 자석을 이용하여 실험차 하부구조에 고정하였다. 측정 주파수범위는 차량설계기준을 고려하여 0 ~ 25 Hz로 하였고, hanning window를 사용하였으며, 평균은 coherence함수의 변동 추이를 관찰하여 300번으로 하였다.

4. 감쇠계에 따른 모드 특성치 비교 고찰

실험모드해석은 선형운동방정식을 적용하기 때문에 비선형성이 강한 구조물에 대해서는 적용하는 것이 곤란하다. 그러나 측정된 주파수응답함수로 모드 특성치를 구하기 때문에 어느 정도의 비선형성을 갖는 구조물에 대해서는 적용이 가능하여야 한다. 구조물이 비선형성을 갖는 경우에 계산한 주파수응답함수와 측정된 주파수응답함수 사이의 오차는 모드 특성치를 구할때 테일러 급수의 1차항만을 고려한 것이 원인으로 생각된다. 그러나 테일러 급수의 2차항까지 고려하여 계산하면 모드 특성치 증가분 해석이 대단히 복잡하게 되어 일반적인 수치해석으로는 곤란하다. 여기서는 모드 특성치의 초기치 증가량을 적절히 줄여 계산하였다. 이는 일반적인 비선형계산에서 사용되고 있는 구분선형법(piecewise linear method)에 해당한다. Fig. 1의 전동차에 대해 측정된 액셀러런스(accelerance)와 실험모드해석에 적용한 감쇠계로 모드 특성치를 구해 합성한 액셀러런스를 비교하여 보았다. 비교에 사용한 감쇠계는 비례점성감쇠계, 일반점성감쇠계, 비례점성·히스테리시스감쇠계이다. 비례점성감쇠계와 일반점성감쇠계의 액셀러런스는 각각 식(17), 식(18)과 같이 된다.



— : Measured accelerance
 --- : Synthesized accelerance by general viscous damping system
 Fig.4 Measured and synthesized accelerance

$$L_{ij}(\omega) = \dots \omega^2 \left\{ \sum_{r=1}^N \frac{A_{ijr}}{(\Omega_r^2 - \omega^2) + j(2\zeta_r \Omega_r \omega)} \right\} \quad (17)$$

$$L_{ij}(\omega) = -\omega^2 \left[\sum_{r=1}^N \left\{ \frac{U_{ijr} + jV_{ijr}}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_{ijr} - jV_{ijr}}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} \right] \quad (18)$$

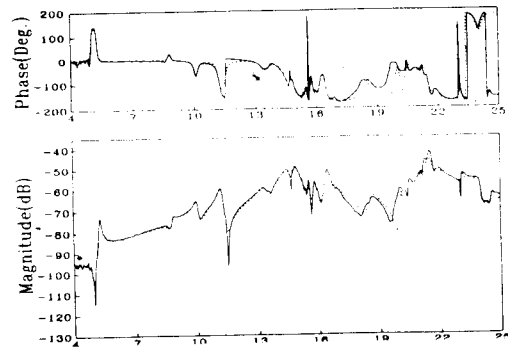
각 감쇠계의 적용에 있어 주파수범위는 측정된 액셀런스에 저주파영역의 잡음이 혼입되어 있었으므로, 4 ~ 25 Hz로 하였고, 고유진동수의 갯수는 18개로 하였다. 잉여 질량과 잉여 강성은 고려하지 않았다. 초기치는 각 감쇠계의 비교를 위하여 동일하게 하였고, 구분선형법도 같이 적용하였다.

계산의 수축은 자승오차 E가 식(19)를 만족할때로 하였다. 여기서 n은 반복횟수를 의미한다.

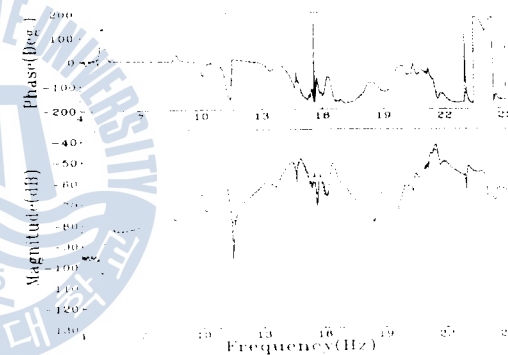
$$E_n = 0.99 E_{n-1} \quad (19)$$

Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6은 각 감쇠계에 대한 모드특성치를 주파수영역 편미분반복법으로 구하고, 이를 다시 합성한 액셀런스(점선)와 측정된 액셀런스(실선)을 비교한 결과이다. 이들 그림에서 상단은 위상을, 하단은 액셀런스를 나타낸다.

이들 그림을 검토하여 보면, 일반점성감쇠계(Fig. 4)의 경우에는, 4~6 Hz 영역에서 약간의 오차가 발생하고 있으며, 15 Hz 이상에서는 상당한 오차를 보이고 있다. 비례점성감쇠계(Fig. 5)의 경우에는, 15 Hz 이상의 주파수영역에서 오차가 큰 것을 알 수 있다. 비례점성·히스테리시스감쇠계(Fig. 6)의 경



— : Measured acceleration
 --- : Synthesized acceleration by proportional viscous damping system
 Fig.5 Measured and synthesized acceleration



— : Measured acceleration
 --- : Synthesized acceleration by proportional viscous-hysteretic damping system
 Fig. 6 Measured and synthesized acceleration

Table 1 Sum of square error

General viscous damping system	Proportional viscous damping system	Proportional viscous hysteretic damping system
0.1365523E-03	0.5449012E-04	0.1344821E-04

Table 2 Modal Parameter

우에는 전 주파수 영역에서 측정된 엑셀런스와 양호하게 일치하고 있으며, 일반점성감쇠계와 비례점성감쇠계에서 오차가 발생한 주파수영역에서도 오차는 현격하게 감소하였다.

Table 1 에 각 감쇠계에 대한 자승오차를, Table 2 에 비례점성·히스테리시스감쇠계로 구한 모드특성치를 보인다. 이 표로 알 수 있는 바와 같이 비례점성·히스테리시스감쇠계의 자승오차가 가장 작았다.

	FREQ.	ZETA	EIG.	SIG.	HYS.	V
	5.2	0.894E-02	0.330E+02	0.295E+00	0.513E-01	0.414E-05
	8.8	0.901E-02	0.553E+02	0.498E+00	0.558E+01	0.203E-05
	10.0	0.864E-02	0.629E+02	0.544E+00	0.757E+01	-0.729E-05
	11.2	0.820E-02	0.701E+02	0.575E+00	0.958E+01	-0.189E-04
	13.4	0.145E-01	0.839E+02	0.122E+01	0.131E+02	-0.175E-04
	14.4	0.145E-02	0.905E+02	0.131E+01	0.154E+02	-0.805E-04
	14.9	0.765E-02	0.934E+02	0.714E+00	0.936E+01	-0.465E-04
	15.5	-0.892E-02	0.974E+02	-0.869E-01	0.544E+02	-0.356E-05
	15.8	0.335E-02	0.993E+02	0.333E+00	0.119E+02	-0.966E-05
	16.4	0.526E-02	0.103E+03	0.543E+00	0.122E+02	-0.313E-04
	16.9	0.249E-01	0.106E+03	0.265E+01	0.239E+02	0.500E-10
	18.6	0.187E-01	0.117E+03	0.219E+01	0.201E+02	-0.183E-04
	20.1	0.392E-02	0.126E+03	0.495E+00	0.266E+02	-0.503E-05
	20.6	0.876E-02	0.130E+03	0.114E+01	0.265E+02	-0.161E-04
	21.4	0.697E-02	0.135E+03	0.939E+00	0.275E+02	-0.970E-04
	22.0	0.445E-02	0.138E+03	0.613E+00	0.309E+02	-0.132E-04
	23.1	0.937E-03	0.145E+03	0.136E+00	0.385E+02	-0.642E-05
	23.9	0.507E-02	0.150E+03	0.762E+00	0.347E+02	0.137E-04

5. 전동차의 진동 모드

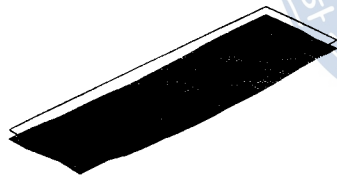


Fig. 7 Heaving mode (10.0 Hz)

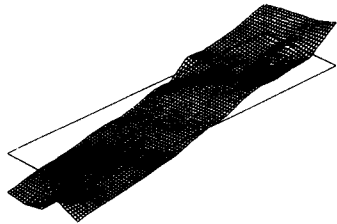


Fig 8. Pitching mode (11.13 Hz)

각 감쇠계로 전동차의 모드 특성치를 구한 결과, 비례점성·히스테리시스감쇠계로 해석하는 것이 가장 양호하였으므로, 이를 적용하여 전동차의 진동 모드를 구하였다. 이 결과를 Fig. 7 ~ Fig. 11에 보인다. Fig. 7은 전동차의 상하방향 모드를, Fig. 8은 전후방향 경사모드를, Fig. 9는 좌우방향 경사모드를 나타낸다. 전동차의 동적설계기준이 되는 1차 굽힘모드는 Fig. 10과 같이 되며, 고유진동수는 기존 전동차의 10 ~ 13 Hz보다 높은 14.9 Hz로 매우 양호한 상태임을 알 수 있다. 1차 비틀림모드는 Fig. 11에 보인다.

6. 결 론

본 논문에서는 실험 대상인 전동차의 감

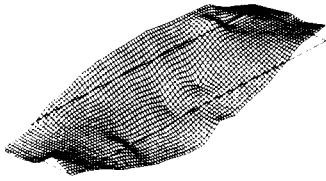


Fig. 9 Rolling mode (13.28 Hz)

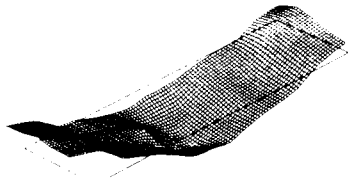


Fig. 10 First bending mode (15.96 Hz)

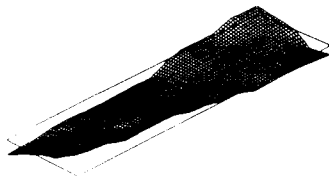


Fig. 11 First torsional mode (23.69 Hz)

특성이 비례점성감쇠와 히스테리시스감쇠를 함께 가지고 있다고 가정하고, 주파수영역의 편미분반복법을 적용하여 모드 특성치를 구하는 방법을 제안하였다. 이 방법의 타당성을 확인하기 위하여 비례점성감쇠계, 일반점성감쇠계로 구한 결과와 비교하였다. 이상을 요약하면 다음과 같다.

1. 구조물을 비례점성·히스테리시스감쇠계로 모델링하고, 감쇠고유각진동수와 모드감쇠율을 유도하였다.
2. 비례점성·히스테리시스감쇠계의 모드 특성치를 주파수영역 편미분반복법으로 계산하는 전산 프로그램을 개발하였다.
3. 전동차의 모드 특성치를 비례점성감쇠계, 일반점성감쇠계, 비례점성·히스테리시스감쇠계로 구하고, 이들을 합성하여 측정치와 비교한 결과, 비례점성·히스테리시스감쇠계로 해석한 결과가 가장 양호하였다.

참 고 문 헌

- (1) D. L. Brown, R. J. Allemang, Ray Zimmerman and M. Mergeay, "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", 1979
- (2) Edwin D.J., "Modal Testing : Theory and Practice", Research Studies Press LTD., 1984
- (3) 大久保信三, "機械の振動と音響", 中央大學出版部, 1981
- (4) 日本機械学会, "構造解析の基礎와 應用", 丸善, 1986
- (5) 長谷昭男, "構造音響學", 培風館, 1985
- (6) 김의간, "箱型遮音構造物における固體及び空氣傳波音の應用", 1987
- (7) 加川幸雄·石川正典, "モード解析入門", 丸善社, 1987
- (8) 오재응, "構造物 모드解析의 基礎와 應用", 1985

