

氷變形특성에 있어서 塑性 모델의 응용

최 경 식*

An Application of Plasticity Model for Ice Deformation Characteristics

Kyungsik Choi

Abstract

The study focuses the mechanical deformation response predicted by the plasticity model for polycrystalline ice. To describe various deformation characteristics, ice is idealized as a perfectly plastic material using an asymptotic exponential failure criterion. This criterion is suited for describing materials which exhibit brittle deformation at low hydrostatic pressure and ductile deformation at high hydrostatic pressure. The results are compared to those of continuum damage mechanics model. Plasticity model shows good agreement with damage model and experimental results for high confining pressures even at high strain-rates which is usually considered as a brittle condition under uniaxial compression.

서 론

알래스카, 캐나다 북부 그리고 시베리아 북부 연안 지역을 포함하는 북극지방은 열악한 기후 조건으로 인하여 오랫동안 개발 불모지로서 인식되어 왔으나, 최근 이 지역에 다량의 석유 및 천연가스의 매장이 확인된 후, 선진 각국은 이들 자원의 채굴을 위한 극지 기술 개발에 노력을 경주하고 있다. 極地工學 혹은 氷工學으로 불리는 이 분야는 최초에는 빙해역에 인접한 북유럽에서 연안수송용 쇄빙선을 건조하는 경험으로 부터 출발하여 이제는 극지의 해양개발, 토목, 건설 등 종합적인 공학의 형태로 변모해 왔다¹⁾.

+ 본 연구는 1990년도 한국과학재단 연구비 지원으로 수행된 연구 결과의 일부임. (과제번호 : 903-1309-003-2)

++ 한국해양공학회지 1990년 12월호(Vol. 4, No. 2) 게재.

* 한국해양대학교 해양공학과

극지공학에 있어서 가장 중요한 문제는 얼음의 변형과 파괴 특성을 이해하는 것이다. 매장이 확인된 석유와 천연 가스의 대부분이 북극해 연안 해저에 존재하고 이들 수역은 하절기 짧은 기간을 제외하고는 항상 수 미터 두께의 얼음으로 덮혀 있기 때문에, 극지 석유시추용 해양구조물이나 쇄빙선들의 설계에 있어서 얼음의 특성에 관한 연구는 최우선적으로 수행되어야 한다.

얼음은 일반적인 구조용 재료와는 판이한 성질을 갖고 있으며, 이 재질적 특성에 영향을 미치는 인자가 아주 다양하고 복잡하다. 우선 얼음의 기계적 성질은 하중이 가해진 속도, 온도, 결정 입자의 크기 등에 따라 민감하게 달라진다²⁾. 일반적으로 얼음은 콘크리트나 유리와 같이 깨지기 쉬운 취성(brittle) 재료로 인식되고 있으나 변형속도가 비교적 느리고 온도가 용융점에 가까울 경우 크리이프(creep)와 같은 소성(혹은 점성)적인 변형 현상을 나타내기도 한다. 또한 얼음의 결정구조도 매우 다양하여, 염분, 공기 등 불순물의 함유량이 적어 비교적 균질의 등방성 재질로 볼 수 있는 담수빙(fresh water ice) 또는 다년생 해빙(multi-year sea ice)으로 부터, 해면에 수직방향으로 성장하는 염수매(brine pocket)의 형성으로 이방성의 기둥형(columnar shape) 결정구조를 이루는 1년생 해빙(first-year sea ice)까지 폭넓게 존재한다³⁾. 해빙은 포함된 염분의 함량에 따라 순수 담수빙의 변종으로 볼 수 있으므로 비교적 복잡한 결정구조와 변형 특성을 가진 해빙의 연구에 앞서, 본 연구에서는 우선 등방성의 다결정빙(polycrystalline ice)에 대한 고찰을 통해 빙변형의 특성을 살펴 보고자 한다.

설계의력으로서 구조물에 작용하는 빙하중을 이론적으로 추정하거나 얼음의 강도를 예측하기 위해서는 이론적 하중-변형 관계가 실제의 얼음의 변형과정을 적절하게 묘사할 수 있는 수학적 모델이 필요하다. 많은 경우에 얼음의 파괴는 미세균열의 성장에 기인한 취성적 특성과 소성유동의 확산에 따른 소성적 변형특성이 공존하는 복합적인 현상을 나타낸다. 얼음의 다양한 파괴양식 때문에 현재까지 개발된 여러 가지 빙변형의 수치 모델들을 실제의 빙변형의 거동을 폭넓게 기술하기에는 많은 제한이 있다. 가장 적합한 모델이란 특정한 설계 목적에 맞도록 정확성과 함께 융통성을 보일 수 있는 것이어야 한다.

재료의 극한 파괴강도를 설계하중으로서 취하려는 경향과 유한요소법과 같은 기존의 계산기법을 이용할 수 있는 편리함 때문에 얼음의 재료특성을 간단히 탄성 혹은 탄소성 모델로써 이상화시키는 예를 흔히 접하게 된다^{4,5)}. 탄성 모델은 변형이 미소하다는 가정하에 선형탄성이론을 적용한 것으로서 변형이 비교적 작은 동적 문제에는 적합하지만, 시간에 따른 변형 현상이 지배적인 준정적(quasi-static)인 문제나 크리이프 문제에는 적합하지 않다. 탄소성 모델에서는 금속 등에 적용되었던 이론들을 기본으로 하여 재료를 탄성-완전소성 재료로 가정하여 von Mises 나 Tresca의 항복 조건식을 사용하여 항복 이후의 거동을 다룬다. 이 해석은 물론 소성변형이 뚜렷이 나타나는 하중조건에 국한한다. 따라서 소성변형과 함께 미세균열의 축적에 기인한 파괴가 예상되는 빙변형의 경우에는 기존의 단순한 탄소성 모델로는 처리가 곤란하다.

본 연구는 다결정빙이 여러 가지 하중조건에서 보이는 복합적 변형 특성을 기술하기 위하여 얼음의 재료특성에 유효한 항복기준(failure criterion)을 제시하고 새로운 소성 모델을 정식화 한

다. 보통 항복조건은 소성변형을 유발하는 조합응력의 함수로써 정의되는데 본 연구에서는 실험적으로 관찰된 빙변형의 특성을 고려하여 지수함수 형태의 항복조건식을 도입한다. 또한 연속체 손상역학 (continuum damage mechanics)에 의한 얼음의 constitutive 모델과의 비교를 통하여 소성 모델의 장점과 어울러 그 사용에 있어서의 제한조건을 밝히고자 한다.

소성 모델의 정식화

언급한 바와 같이 얼음을 포함한 몇몇 재료들은 인장력 아래에서는 주로 취성적 특성을 나타내고 반면 압축하중을 받을 때는 주 변형 특성이 소성적인 현상을 보인다⁸⁾. 이들 재료들은 보통 인장강도가 압축강도에 비해 상당히 낮은 반면 강도의 증가는 변형속도, 온도, 그리고 정수압 (hydrostatic pressure)과 같은 압축력의 영향에 민감하게 대응하기 때문에^{11,13,15,18,19)} 이런 재료들의 항복조건을 기술하기 위해서는 인장강도와 압축강도의 차이에 영향을 미치는 요인을 고려해야만 할 것이다.

금속과 같은 재료의 항복기준을 나타내는데 흔히 von Mises의 항복조건식을 사용하는 것을 본다. 이 항복조건식은 J_2 로 표시되는 응력의 조합이 어떤 기준치에 이르면 재료의 항복 (yield) 혹은 파괴 (failure)가 일어난다고 가정한다.

$$F(\sigma_{ij}) = J_2 - k^2 = 0 \quad (1)$$

여기서 k 는 1축인장에 의해 발생하는 재료의 항복강도를 나타내는 상수이며 J_2 는 편차응력텐서의 제2불변량(the second invariant of the deviatoric stress tensor)을 표시한다. 잘 알려져 있듯이 von Mises의 항복조건식은 3차원 주응력 공간에서 원점을 지나는 정수압선(hydrostatic line)에 축을 맞춘 원통으로 표시된다. 따라서 항복응력의 조건은 정수압과는 무관하게 압축과 인장 사이의 구별이 존재하지 않는다.

한편 정수압의 영향을 고려하여 콘크리트나 토양(soil)등의 재료에 적용이 가능하도록 수정한 항복기준으로서 Drucker-Prager의 항복조건식을 들 수 있다⁷⁾.

$$F(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2)$$

여기서 I_1 은 응력텐서의 제1불변량(즉 $I_1 = \sigma_{ii}$)을 나타낸다. Drucker-Prager의 항복조건식은 3차원 주응력 공간에서 원추(right-circular cone) 형태의 항복면(failure surface)으로 표시된다. 두 개의 상수 α 와 k 는 바로 압축과 인장시의 강도 차이로부터 결정된다. 그 외에 항복기준에 대한 정수압의 비선형적 영향을 포함할 수 있도록 몇 가지 새로운 소성 모델이 제시된 바 있다^{8,9,10,15,18)} 이들 모델들은 사용하려는 재료의 변형 특성에 따라 타원체(ellipsoid), 물방울(tear drop) 형상을 가지고 있다.

항복조건식은 3차원 주응력 공간에서의 표현 대신 $I_1 - \sqrt{J_2}$ 평면상에서 나타내기도 하는데 이 방식은 항복기준에 대한 정수압의 영향력을 쉽게 지적할 수 있는 장점이 있다. Fig. 1에서 보듯이 von Mises의 항복조건식은 항복응력의 상태가 정수압의 하중상태와 무관한 반면 Drucker-Prager의 항복조건식은 정수압에의 의존성이 선형의 관계를 갖는다. 다결정빙에 관한 실험과 관찰을 통해 얻어진 결과에 의하면 정수압의 영향은 비선형적으로서, pressure melting과 같은 상변화를 무시할 경우, 압축력이 충분히 커지면 $\sqrt{J_2}$ 즉 deviatoric strength의 크기는 거의 일정한 값을 유지하면서 취성파단과 같은 변형 현상이 대부분 억제되는 것을 알 수 있다¹¹⁾. Karr et al.¹²⁾는 암석 등의 실험 자료를 검토한 후 등방성 및 이방성 재료의 항복조건식으로 비선형의 정수압의 항 I_1 이 포함된 (3)식을 제시하였다. 본 연구에서는 다결정빙에 있어서 취성변형과 소성변형의 두 극단적 특성은 정수압 하중의 크기가 결정한다는 기본 가정 아래 빙변형의 macroscopic 한 소성 모델로서 (3)식을 사용한다.

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} + C_2 \exp(C_3 I_1) - C_1 = 0 \quad (3)$$

(단 $C_1 > C_2, C_3 > 0$)

Fig. 2에 도시한 바와 같이 (3)식으로 표현된 asymptotic exponential 항복조건식은 다음과 같은 특성을 갖는다. 정수압이 충분히 압축상태를 유지할 때 (즉 $I_1 = -\infty$) $\sqrt{J_2}$ 의 값은 일정허용응력치 C_1 에 수렴하고, 반면에 정수압이 인장상태로 바뀔 때 따라 $\sqrt{J_2}$ 의 값은 감소하게 된다. 새로운 항복조건식은 다결정빙에 대한 세 개의 재료상수, C_1, C_2, C_3 를 포함하고 있는데 주어진 온도와 변형율속도(strain-rate)에서는 일정한 값을 가진다. (3)식에서 각각 $C_2 = 0$ 이면 von Mises의 항복조건식으로, 그리고 지수함수에서 Taylor 급수의 첫 항만을 사용하면 앞서의 Drucker-Prager 항복조건식으로 귀착함을 알 수 있다. 상수들의 결정은 동일 재료에 대한 세 가지 이상의 독립적 실험을 통하여 결정할 수 있다. 본 연구에서는 1축 하중으로는 비교적 체계적인 데이터 수집이 가능했다고 판단되는 실험 자료¹³⁾와 이 실험 결과로부터 다축하중의 경우를 시뮬레이션시킨 결

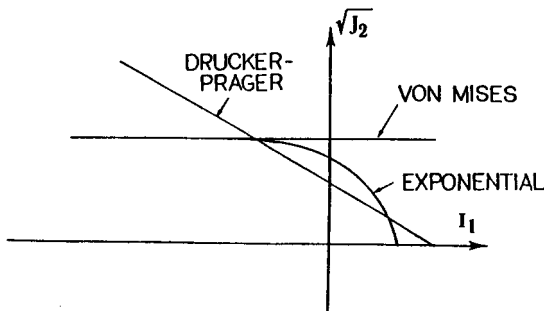


Fig 1. Von Mises, Drucker-Prager and Asymptotic Exponential Failure Criteria.

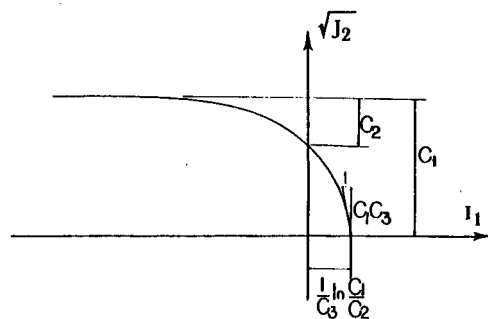


Fig 2. Asymptotic Exponential Failure Criterion in $I_1 - \sqrt{J_2}$ plane.

과¹⁶⁾를 이용하여, 최소자승법 (least square technique)을 사용해서 결정하였다(Table 1). (3)식으로 표현된 소성 모델의 항복기준을 얼음에 대한 축방향의 세 가지 변형율속도에 따라, 후에 기술할 손상역학 모델의 결과와 함께, Fig. 3의 $I_1 - \sqrt{J_2}$ 평면상에 도시하였다. 변형율속도가 비교적 낮은 경우 (예를 들어 10^{-5} sec^{-1} 이하) 빙변형은 본 소성 모델에 의해 충분히 정확하게 이상화시킬 수 있음을 알 수 있다.

Table 1. Material Parameters in Plasticity Model

Strain-rate (sec^{-1})	C_1 (MPa)	C_2 (MPa)	C_3 (MPa^{-1})
10^{-3}	8,701	4,098	0,094
10^{-4}	4,286	0,992	0,151
10^{-5}	1,968	0,224	0,151

소성유동이 발생할 때까지의 미소탄성변형을 생각지 않으면 얼음의 항복 이후 거동은 완전소성으로 취급할 수 있고, 이 때 소성안정성에 대한 조건으로 다음과 같은 소성유동의 법칙 (plastic flow rule or normality rule)을 정의한다. 즉 항복조건식을 정의하는 포텐셜 함수 $F(\sigma_{ij})$ 는 3차원 주응력 공간에서 볼록한 (convex) 표면을 이루며 이 때 소성변형율속도 텐서 성분은 (4)식과 같이 포텐셜 함수 F 의 미분식에 비례하는 것으로 정의한다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4}$$

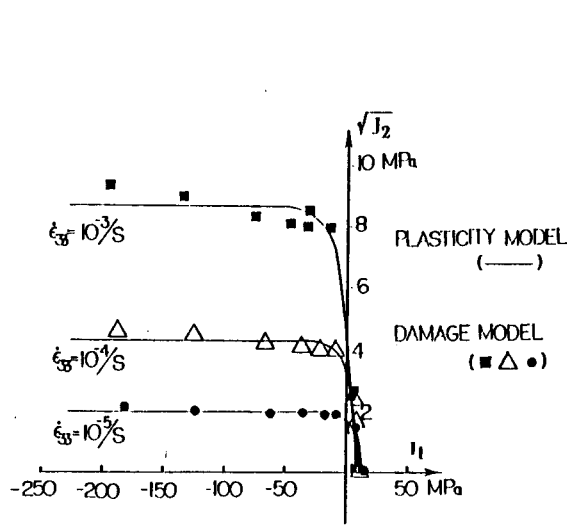


Fig 3. Plasticity Model Results in $I_1 - \sqrt{J_2}$ plane.

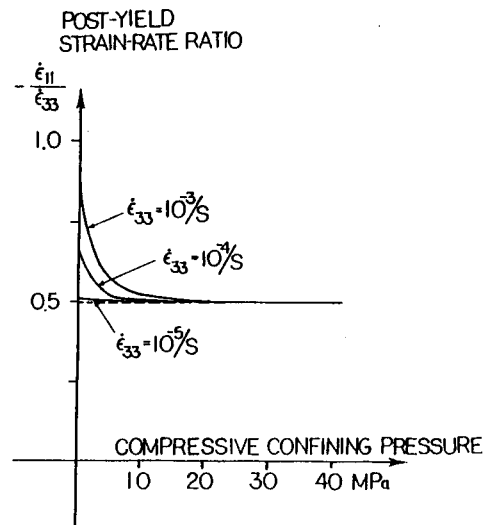


Fig 4. Post-yield Strain-rate Ratio vs. Confining Pressure.

여기서 λ 는 양의 비례상수를 나타낸다. (3)식으로 표현된 지수함수 형태의 항복조건식 $F(\sigma_{ij})=0$ 을 이용하면 소성변형률속도에 관한 (5)식을 얻는다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda [C_2 C_3 \exp(C_3 I_1) \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} J_2^{-1/2}] \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 3\lambda C_2 C_3 \exp(C_3 I_1) \quad (6)$$

여기서 σ'_{ij} 는 편차응력 (deviatoric stress)을 나타낸다. (6)식을 통해 체적변형률속도 $\dot{\epsilon}_{ii}$ 는 항상 양의 값을 갖고, C_2 가 0이 아닌 한 소성유동시 체적의 변화를 동반한다는 것을 알 수 있다. Confined pressure 실험 시의 빙변형에 있어서 항복 이후의 거동은 소성변형률의 검토를 통해 파악할 수 있다¹⁴⁾. 항복 이후의 변형률속도비 (post-yield strain-rate ratio)는 $-\dot{\epsilon}_{11}/\dot{\epsilon}_{33}$ 으로 정의되는데 Fig. 4에 그 결과가 도시되었다. Confining pressure ($\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq 0$)가 증가함에 따라 변형률속도비가 소성변형에 있어서의 Poisson비에 해당하는 0.5에 접근하고 있다. 즉 정수압 압축하중이 증가함에 따라 소성적 변형이 두드러짐을 보여 준다. 한편 confined pressure 실험 시 체적팽창에 대한 정수압의 효과를 마찬가지로 살펴 볼 수 있다. 항복 이후의 체적변형률속도비 (volumetric strain-rate ratio)는 $\dot{\epsilon}_{ii}/\dot{\epsilon}_{33}$ 로 정의되는데 Fig. 5에 그 결과를 도시하였다. 압축하중이 충분히 클 경우는 변형률속도에 상관없이 본 소성 모델에 의한 빙변형의 설명이 유효함을 알 수 있다. Confined pressure 실험에 대한 2차원 failure envelope이 축방향 변형률속도 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} sec^{-1} 에 따라 Fig. 6에 도시되었다.

2축 평면응력 상태에서는 축방향으로의 일정한 변형률속도를 정의하기에 어렵고 실제로 발표된 빙변형의 실험자료도 아주 드물어 비교에 어려운 점은 있으나 본 소성 모델의 해석을 통해 일반적인 2축응력 상태에서의 빙변형의 특징을 유추할 수 있다. 평면응력의 조건 ($\sigma_{33} \neq 0$)을 적용하면, (3)식은 2차원 주응력 $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ 평면에 다음 식으로 표현된다.

$$C_2 \exp[C_3(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + [\frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})]^{1/2} = C_1 \quad (7)$$

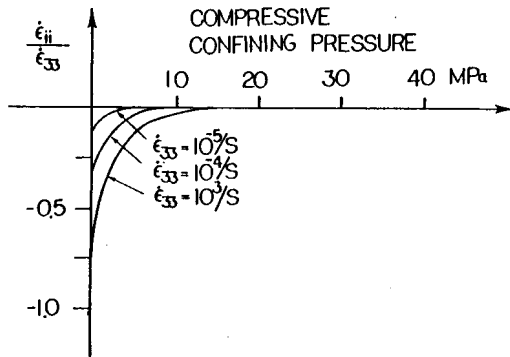


Fig 5. Post-yield Volumetric Strain-rate Ratio vs. Confining Pressure.

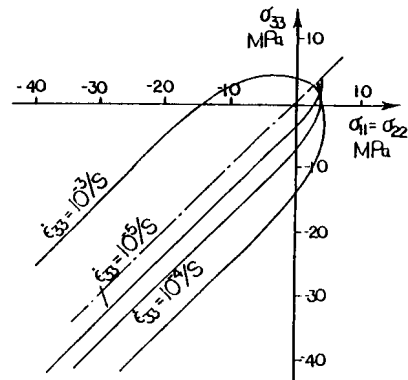


Fig 6. Failure Envelopes for Confined Pressure Tests in the Principal Stress Plane.

Table 1에 주어진 계수들을 이용하여 변형율속도 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} sec^{-1} 에 대한 failure envelope를 Fig. 7에 손상역학 모델의 계산 결과와 함께 도시하였다. 변형율속도가 비교적 작은 경우 failure envelope의 모양은 von Mises의 타원과 유사한 형태를 나타내는 반면 변형율속도가 증가함에 따라 얼음의 변형은 실험 자료를 통해 보고된 바와 같이 압축강도가 인장강도를 훨씬 능가하는 경향을 보여주고 있다^{15,18,20}.

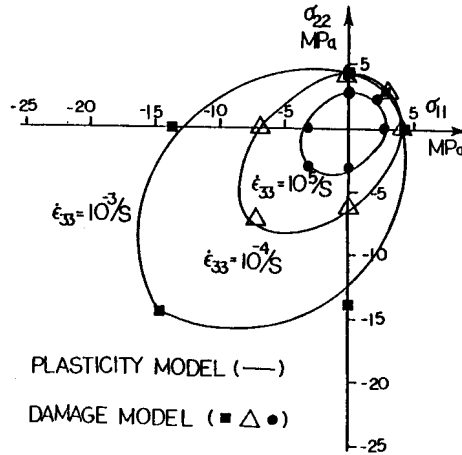


Fig. 7. Plane Stress Failure Envelopes in the Principal Stress Plane using the Asymptotic Exponential Failure Criterion.

손상역학(DAMAGE MECHANICS) 모델과의 비교

언급한 바와 같이 얼음은 변형속도, 온도, 염분 등의 변화에 따라 판이한 변형 특성을 보여 준다. 최근 연속체손상역학 (continuum damage mechanics)의 이론을 사용하여 얼음의 소성적 변형 특성과 미세균열(microcracking)에 의한 점진적인 파괴현상을 함께 기술할 수 있는 3차원 수학적 모델링이 시도되었다¹⁶. 손상역학에 의한 constitutive 모델을 얼음을 비선형의 점탄성의 재질로 가정하고 탄성변형과 소성변형을 나타내는 변형율을 미세균열의 영향을 나타내는 상태함수 (state variable)인 damage parameter를 도입함으로써 brittle에서 ductile의 범위에 걸친 빙변형 특성을 비교적 용이하게 기술해 준다. 이 모델은 크리프 현상을 포함하여 여러 가지 하중상태에 대한 빙변형의 응력-변형률 관계를 시뮬레이션시키고 있으며 그 응용으로 1축하중을 비롯하여 다축하중도 다루고 있다. 손상역학 이론의 가장 근저에 놓인 개념은, 재료 내부의 복잡하고 미시적인 미세균열 현상을 상태함수의 도입으로써 재료의 현재 변형 상태를 완전하게 정의할 수 있다는 점이다¹⁷. 손상역학에 의한 수치모델의 결과가 Fig. 3과 Fig. 7에 도시되어 본 연구의 소성 모델의 결과와 비교되었다. 낮은 변형율속도에서는 손상역학 모델과 소성 모델이 서로 일치되고 있

음에서 빙변형이 소성적임을 잘 알 수 있으나, 변형율속도가 높아지면 소성 모델은 손상역학 모델과 차이를 드러낸다. 높은 변형율속도 수준에서는 응력 상태가 인장이든 압축이든 가리지 않고 빙변형은 취성파단의 경향이 높아짐을 알 수 있다. 예를 들어 10^{-3} sec^{-1} 이상의 변형율속도라면 소성 모델은 빙변형을 기술하는데 있어서 적합치 않다고 말할 수 있다. 그러나 이 한계는 정수압 하중과 같은 조건에 의해서 변화할 수 있음이 Fig. 4~Fig. 6를 통해 예측된다. 즉 정수압에 의한 압축하중이 충분히 클 경우 변형율속도가 비교적 높다 하더라도 소성변형이 주된 것임을 알 수 있다.

결 론

얼음은 인장강도가 압축강도에 비해 상당히 낮은 반면 강도의 증가는 변형율속도, 온도 그리고 정수압과 같은 압축력의 영향에 민감하게 대응한다. 본 연구는 다결정빙이 여러 가지 하중조건에서 보이는 복합적 변형 특성을 기술하기 위하여 얼음의 재료특성을 고려한 새로운 지수함수 형태의 asymptotic 항복기준을 사용하였다. 변형율속도가 낮은 경우 손상역학 모델과 소성 모델은 비교적 잘 일치하며 빙변형은 소성 모델로 충분히 이상화시킬 수 있음을 보여준다. 반면 변형율속도가 높아지면 소성 모델은 손상역학 모델과 차이를 보이고 있으며 얼음은 취성파단의 경향을 보인다. 그러나 정수압에 의한 압축하중이 충분히 클 경우 변형율속도가 비교적 높다 하더라도 소성 모델에 의한 빙변형의 설명이 유효함을 알 수 있다.

국내의 극지공학에 대한 인식도나 학계의 연구는 아직 기초 단계에 머무르고 있는 현실이다²¹⁾. 본 연구는 극지공학의 기본 대상으로서 얼음의 재료적 특성과 파괴 양식을 파악하고 나아가 빙해역의 구조물에 작용하는 빙하중의 추정에 직접적인 도움이 되리라 사료된다. 아울러 본 연구는 얼음과 유사한 기계적 성질을 갖고 있는 콘크리트, 암석, 영구 동토(frozen soil) 등의 해석에도 이용할 수 있음을 밝힌다.

참고문헌

- 1) Chung, J.S. et al., "Advances in Ice Mechanics-1987", Proc. 6th Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, 1987.
- 2) Cammaert, A.B. and Muggeridge, D.B., "Ice Interaction with Offshore Structures", Van Nostrand Reinhold, New York, 1988.
- 3) Michel, B., "Ice Mechanics", Les Presses De L'universite Laval, Quebec, 1978.
- 4) Nevel, D.E., "A Semi-infinite Plate on an Elastic Foundation", Cold Regions Research and Engineering Laboratory Report 136, Hanover, 1965.
- 5) Bhat, S. and Xirouchakis, P.C., "Rigid-Plastic Analysis of Floating Plates", M.I.T. Ocean Engineering Report 84-11, 1984.

- 6) Hawkes, I. and Mellor, M., "Deformation and Fracture of Ice under Uniaxial Stresses", *Journal of Glaciology*, Vol. 11, pp. 103-131, 1972.
- 7) Chen, W.F., "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw-Hill, New York, 1982.
- 8) Reinicke, K.M. and Ralston, T.D., "Plastic Limit Analysis with an Anisotropic, Parabolic Yield Function", *International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences and Geomechanics*, Vol. 14, pp. 147-154, 1977.
- 9) Yang, W.H., "A Generalized von Mises Criterion for Yield and Fracture", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 297-300, 1980.
- 10) Nadreau, J.P. and Michel, B., "Yield and Failure Envelope for Ice under Multiaxial Compressive Stresses", *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 13, pp. 75-82, 1986.
- 11) Jones, S.J., "The Confined Compressive Strength of Polycrystalline Ice", *Journal of Glaciology*, Vol. 28, pp. 171-176, 1982.
- 12) Karr, D.G., Law, F.P., Hoo-Fatt, M. and Cox, G.F.N., "Asymptotic and Quadratic Failure Criteria for Anisotropic Materials", *International Journal of Plasticity*, Vol. 5, pp. 305-336, 1989.
- 13) Mellor, M. and Cole, D.M., "Deformation and Failure of Ice under Constant Stress or Constant Strain-rate", *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 5, pp. 201-219, 1982.
- 14) Scholtz, C.H., "Microfracturing and the Inelastic Deformation of Rock in Compression", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 73, pp. 1417-1432, 1968.
- 15) Timco, G.W. and Frederking, R.M.W., "Confined Compression Tests : Outlining the Failure Envelope of Columnar Sea Ice", *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 12, pp. 13-28, 1986.
- 16) Karr, D.G. and Choi, K., "A Three Dimensional Constitutive Damage Model for Polycrystalline Ice", *Mechanics of Materials*, Vol. 8, pp. 55-66, 1989.
- 17) Kachanov, L.M., "Introduction to Continuum Damage Mechanics", Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1986.
- 18) Timco, G.W. and Frederking, R.M.W., "An Investigation of the Failure Envelope of Granular/Discontinuous Columnar Sea Ice", *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 9, pp. 17-27, 1984.
- 19) Schulson, E.M., Lim, P.N. and Lee, R.W., "A Brittle to Ductile Transition in Ice under Tension", *Philosophical Magazine A*, Vol. 49, No. 3, pp. 353-363, 1984.
- 20) Watson, J.C., "Three-Dimensional Analysis of Ice Sheet Indentation : Upper Bound Solutions", Master thesis in Ocean Engineering, M.I.T. 1986.
- 21) 한국기계연구소(KIMM), "빙의 파괴강도에 관한 연구(1)", 과학기술처연구보고서 UDC551.46, 1987.

