

액체 슬로싱에 대한 3차원 동요방정식과 기진력

신장용, 강신영, 최경식

한국해양대학교 해양공학과

Three Dimensional Governing Equations and Exciting Forces for Liquid Sloshing

J.R. Shin, S.Y. Kang, K. Choi

Department of Ocean Engineering
Korea Maritime University

ABSTRACT

The fluid motion inside a partially filled tank is called "sloshing" and it is of great concern to structural designers of ships. Sloshing analysis is significant, especially in the design of liquid cargo vessels such as LNG carriers and crude oil tankers, since sloshing loads attain such considerable value enough to cause structural damage.

In this paper, three dimensional governing equations and exciting forces are derived for the study of sloshing phenomena. In order to include the nonlinearity that occurs at the fluid-tank interface and to avoid the complex boundary conditions on moving walls, a fixed coordinate system to the moving tank is adopted.

1. 서 론

액체의 자유표면은 액체를 담고있는 탱크의 가속도 방향과 항상 수직하게 놓이려는 경향이 있다. 그러므로 부분적으로 적재된 탱크가 동요할 경우 탱크의 가속도 방향이 순간순간 마다 변하게 되므로 그에 따라서 자유표면의 순간위치는 불안정하게 되어 자유표면도 동요하게 된다. 이러한 탱크내 액체의 동요현상을 슬로싱 (sloshing) 이라 하며 이로 인하여 탱크벽면에 동적 유체력이 유발되는데 이 슬로싱 현상은 액체화물 탱크의 구조설계에 있어서 대단히 중요하다.

이러한 슬로싱 현상에 대한 해석은 1950년대에 우주선 연료탱크의 설계에 있어서 문제가 제기된 이후로 주로 실험적인 접근만이 가능했었으나 최근들어 여러 가지 수치해석법이 개발되면서 고속전산기를 이용한 수치해석적인 방법이 많이 사용되고 있다. 그러나 많은 연구자들은 실제 슬로싱 현상을 2차원 문제로 단순화시켜 해석하거나 특수한 경우에만 3차원 문제로 취급하였으나, 사용된 방정식이 정확하지 못하였거나 혹은 탱크의 동요가 특수한 경우만으로 제한한 경우가 대부분이었다.

선박의 슬로싱 경우도 마찬가지로, 실제의 해상상태에서 선체의 6자유도 동요로 인한 기진력을 적절히 고려하고 있지 못하다고 할 수 있다. 예를들어 Pantazopoulos(1988) 가 선체의 5자유도 동요를 고려하고 장파 (long wave) 이론을 적용하여 3차원 문제를 해석한 바 있으나 그의 방정식은 2차원화했을 때 타 연구자들의 (이판목 외, 1988) 2차원 방정식과 일치하지 않는 모순이 발견되었고, 그 외에 3차원 문제를 연구한 논문들 (Arai et al., 1992; 황종홀 외, 1991) 에서도 탱크의 회전동요는 여전히 고정된 단일축에 대해서만 발생하는 것으로 취급하고 있다.

앞서 언급한 3차원 해석이 요구되는 이유는 슬로싱으로 인한 설계하중을 예측하기 위해서 다음과 같은 점들을 고려해야 하기 때문이다.

- (1) 거친 해상상태에서 선체의 6자유도 동요로 기인한 기진력.
- (2) 탱크내에서 종방향과 횡방향으로 발생하는 파의 상호작용.
- (3) 3차원 유동에 미치는 탱크형상의 영향 및 내부재의 효과.
- (4) 탱크의 천정 (ceiling) 및 구석 (corner) 에 가해지는 액체화물의 충격.
- (5) 탱크벽에서 발생하는 비선형효과.

위의 사항들은 모두 3차원 해석을 필요로하는데 특히 (4)항은 탱크의 구조부재에 손상에 치명적인 손상을 줄 수 있는 비선형적인 충격압력의 산정과 밀접한 관련이 있다.

(5)항의 비선형성은 탱크에 고정되어 탱크와 동일한 동요를 하는 좌표계를 사용하면 피할 수 있다 (Su et al., 1982). 이 좌표계에서는 탱크의 순간위치가 변하지 않기 때문에 탱크의 초기위치가 바로 탱크의 순간위치가 된다. 이 경우 탱크벽에서 경계조건은 고정 고체벽에서의 운동학적 경계조건으로 표시될 수 있다. 그러므로 슬로싱을 기술하기 위해서 탱크와 동일한 동요를 하는 가속계를 사용하는 것이 편리하다.

슬로싱을 발생시키는 기진력은 관성계에서 가속계로 좌표변환을 통해서 구할 수 있는데 좌표변환할 때 발생하는 어려움은 유한회전이 벡터가 아니기 때문에 (Malvern, 1969) 2차원 해석에서 사용했던 벡터형식의 좌표변환식 (이판목 외, 1986) 은 3차원 해석에서는 적용할 수 없다. 즉, 2차원 문제에서는 명백히 고정된 하나의 축에서만 회전이 가능하고 탱크의 동요는 평면내에서만 발생하기 때문에 회전을 벡터로 취급해도 무방하나 3차원 문제에서는 3개의 회전축이 존재하고 3개의 회전축에서 발생하는 회전은 벡터가법으로 중첩할 수 없으므로 벡터형식의 좌표변환식은 적용할 수 없다. 그러므로 3개의 회전축에 대해서 회전동요가 가능한 경우에는 텐서형식의 좌표변환식을 사용해야 한다. 더우기 회전동요가 발생하는 축이 여러 개가 존재할 경우 회전순서에 따라서 슬로싱을 발생시키는 기진력이 다르기 때문에 좌표변환할 때 회전동요의 순서를 반드시 고려해야 한다.

본 논문의 목적은 실제 해상상태에서 선체의 6자유도 동요로 인한 기진력을 유도하는데 있다. 사용한 좌표계는 탱크에 고정되어 탱크와 동일한 동요를 하는 가속계이다. 회전동요의 중심은 선체의 무게중심에 두었고, 선체의 무게중심으로 부터 탱크의 위치와 배치는 일반성을 위해서 임의상태로 하였다. 그리고 본 논문에서 유도한 기진력을 몇가지 특수한 동요상태로 단순한 시켰을 때 타 연구자들이 유도한 기진력들 (이판목 외, 1988; 김용환 외, 1992; Arai, 1986; Su et al., 1982; Arai et al. 1992) 과 정확히 일치함을 보였다.

2. 동요방정식 (Governing Equations)

본 연구에서 고려한 액체는 등방성 균질이며 Newton 점성유체로 가정하였다. 또한 탱크는 완전강체이며 사용된 좌표계는 탱크에 고정되어 탱크와 동일한 동요를 하고 탱크는 3차원 6자유도 동요를 하는 것으로 가정하였다.

비압축성 유체로 가정할 경우 연속방정식은 동요좌표계에서도 다음과 같이 표시된다.

$$u_{i,i} = 0 \quad (1)$$

한편 비압축성 점성유체에 대한 운동량보존의 법칙은 Navier-Stokes 방정식으로 표시되는데 고정좌표계에서 다음과 같이 표시된다.

$$A_i = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + B_i + \nu U_{i,kk} \quad (2)$$

여기서 A_i 는 고정좌표계에서 측정된 액체화물의 가속도, ρ 는 액체화물의 밀도, $P_{,i}$ 는 고정좌표계에서 측정된 압력구배력, B_i 는 고정좌표계에서 측정된 액체화물에 작용하는 체적력으로 중력만을 포함한다. 그리고 ν 는 액체화물의 동점성계수, U_i 는 고정좌표계에서 측정된 액체화물의 속도이고 $\nu U_{i,kk}$ 는 고정좌표계에서 측정된 점성구배력이다.

동요좌표계에서 운동량보존의 법칙은 식 (2)를 좌표변환하면 얻을 수 있는데 일반적으로 물리법칙은 물리현상을 기술하기 위해서 기준으로 사용하는 좌표계에 의존하지 않으므로 동요좌표계에서의 운동량방정식도 식 (2)와 같은 형태로 표시되어야 한다. 즉 동요좌표계에서 운동량보존의 법칙도 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$a_i = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + f_i + \nu u_{i,kk} \quad (3)$$

그러나 물리량의 측정치는 사용되는 좌표계에 의존하므로 동요좌표계에서 측정

한 액체화물의 가속도 a_i , 압력구배력 p_i , 체적력 f_i , 점성구배력 $\nu u_{i,kk}$ 는 고정좌표계에서 측정한 값과 다르다. 특히 동요좌표계에서 측정한 체적력에는 고정좌표계에서 측정한 중력외에 탱크의 동요로 기인한 관성력이 포함되며, 중력도 일정한 방향으로 작용하지 않는다. 이 체적력이 슬로싱을 발생시키는 기진력 (exciting force) 으로 작용하는데 좌표변환을 통해서 구할 수 있다.

3. 좌표변환과 기진력 (Coordinate Transformation and Expression of Exciting Forces)

물리법칙은 물리현상을 기술하기 위해 기준으로 사용되는 좌표계에 의존하지 않지만 서로 다른 좌표계에서 측정되는 물리량들은 일반적으로 다르다. 그러므로 서로 다른 좌표계에서 측정되는 물리량들 사이에는 어떤 관계가 성립되어야 하는데, 이 관계를 좌표변환 (coordinate transformation) 혹은 관측자변환 (observer transformation) 이라 한다. 즉, 공간위에 고정된 좌표계 (이하 고정좌표계, fixed coordinate system) 에서 슬로싱 현상을 기술할 때나 탱크에 고정되어 탱크와 동일한 동요를 하는 좌표계 (이하 동요좌표계, moving coordinate system) 에서 슬로싱 현상을 기술할 때나 적용되는 물리법칙은 동일하고 방정식의 형태도 동일해야 한다. 그러나 방정식에 나타나는 물리량들의 각 좌표계 성분은 일반적으로 일치하지 않는다. 슬로싱 현상은 액체화물의 부분적재로 기인한 자유표면의 존재와 탱크의 가속도 운동으로 기인한 관성력이 일종이 기진력으로 작용하기 때문에 발생하는데 이 관성력은 고정좌표계에서 동요좌표계의 좌표변환을 통해서 구할 수 있다. 그리고 탱크의 동요는 선체의 6자유도 동요로부터 기인된 것이기 때문에 슬로싱 현상을 일반적으로 기술하기 위해서는 선체의 동요를 기술하기 위한 동요좌표계와 탱크내 유체점들의 위치를 기술하기 위한 동요좌표계를 따로 설정하는 것이 좋다. 그러므로 기진력을 구하기 위해서는 두번의 좌표변환이 필요하게 된다.

3.1 고정좌표계에서 선체의 무게중심에 고정된 동요좌표계의 좌표변환

Fig. 1 은 고정좌표계와 선체의 무게중심에 고정된 좌표계를 보여주는데, 고정좌표계를 $(O-X_1, X_2, X_3, t)$ 로 표시하였다. 탱크의 강체동요의 중심은 선체의 무게중심이 되는데 탱크의 강체동요를 기술하기 위해서 선체의 무게중심에 설정한 동요좌표계(가속계)를 $(o^*-x_1^*, x_2^*, x_3^*, t)$ 로 표시하였다. 그리고

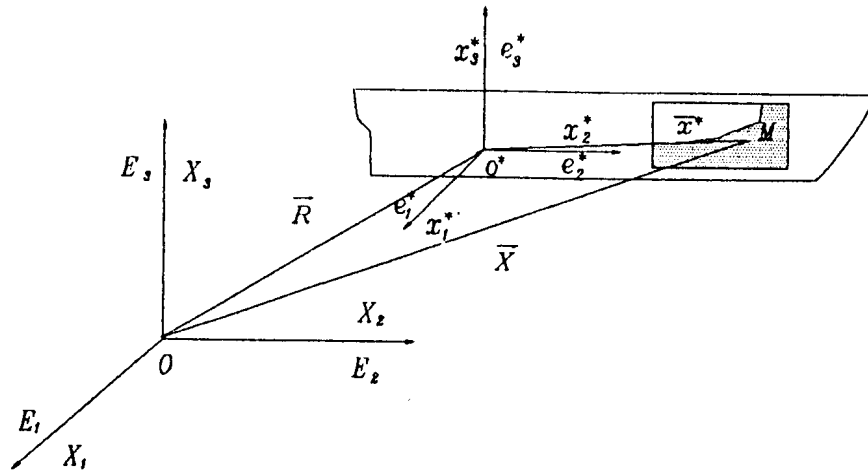


Fig.1 A coordinate system and a moving coordinate system 1.

두 좌표계에서 측정하는 물리량은 다르기 때문에 구분을 위해서 고정좌표계에서 측정되는 물리량은 대문자로 표시하였고 선체의 무게중심에 고정된 동요좌표계에서 측정되는 물리량은 소문자에 상첨자 "*" 를 붙여서 표시했다. Fig. 1 에서 \vec{R} 은 관측자 O 가 본 관측자 o^* 의 상대위치이고, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 는 각각 x_1^*, x_2^*, x_3^* 축에 대한 회전동요각을 표시한다. 가속도항의 표현에는 \vec{R} 의 2계 도함수만이 필요하게 되는데 그것의 각 좌표축 방향성분인 $\ddot{R}_1, \ddot{R}_2, \ddot{R}_3$ 가 각각 X_1, X_2, X_3 축 방향의 병진동요로 인한 가속도를 표시한다.

편의상 관측자 O 와 o^* 가 동일 시간에 좌표계를 설정했다면 탱크내에 유체점들의 위치를 기술하는데 있어서 시간에 대해선 아무런 차이가 없다. 그러

므로 주어진 시간 t 에 탱크내 유체의 임의의 한 점 M 을 관측자 O 는 X_i 로, 관측자 o^* 는 x_i^* 로 기록할 것이고 두 관측자가 본 유체점 M 은 동일점 이므로 다음 관계가 성립한다.

$$X_i = R_i + Q_{ij}x_j^* \quad (4)$$

여기서 Q 는 두 좌표계사이의 방향여현으로 표시되며 다음과 같은 성분을 갖는다.

$$Q_{ij} = E_i e_j^* \quad (5)$$

즉 Q 는 o^* 에서 O 위로의 선형위상 (linear mapping) 을 정의한다. 그리고 선형위상 Q 는 등각직교 2차텐서 (proper orthogonal second order tensor) 이다. 식 (4)로 부터 관측자 O 가 측정한 유체의 속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

$$U_i = \dot{R}_i + \dot{Q}_{ij}x_j^* + Q_{ij}u_j^* \quad (6)$$

$$A_i = \ddot{R}_i + \ddot{Q}_{ij}x_j^* + 2\dot{Q}_{ij}u_j^* + Q_{ij}a_j^* \quad (7)$$

식 (7)에 Q_{ik} 를 곱하여 첨자 i 를 축약 (contraction) 하면 관측자 o^* 가 측정한 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$a_k^* = Q_{ik}A_i - Q_{ik}\ddot{R}_i - Q_{ik}\ddot{Q}_{ij}x_j^* - 2Q_{ik}\dot{Q}_{ij}u_j^* \quad (8)$$

식 (8)의 우변의 2번째 이후의 항들이 탱크의 동요로 인한 관성력이고 이 힘과 중력이 슬로싱을 발생시키는 기진력이 된다. 그러므로 기진력을 f_k^* 로 표시하면

식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$a_k^* = Q_{ik}(A_i - B_i) + f_k^* \quad (9)$$

$$f_k^* = Q_{ik}(B_i - \ddot{R}_i) - Q_{ik} \ddot{Q}_{ij} x_j^* - 2Q_{ik} \dot{Q}_{ij} \dot{u}_j^* \quad (10)$$

3.2 선체의 무게중심에 고정된 동요좌표계에서 탱크에 고정된 동요좌표계로의 좌표변환

Fig. 2 는 선체의 무게중심에 고정된 동요좌표계 $(o^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*, t)$ 와 탱크의 무게중심에 고정된 동요좌표계 (o, x_1, x_2, x_3, t) 를 보여준다. \vec{x}^* 는 관

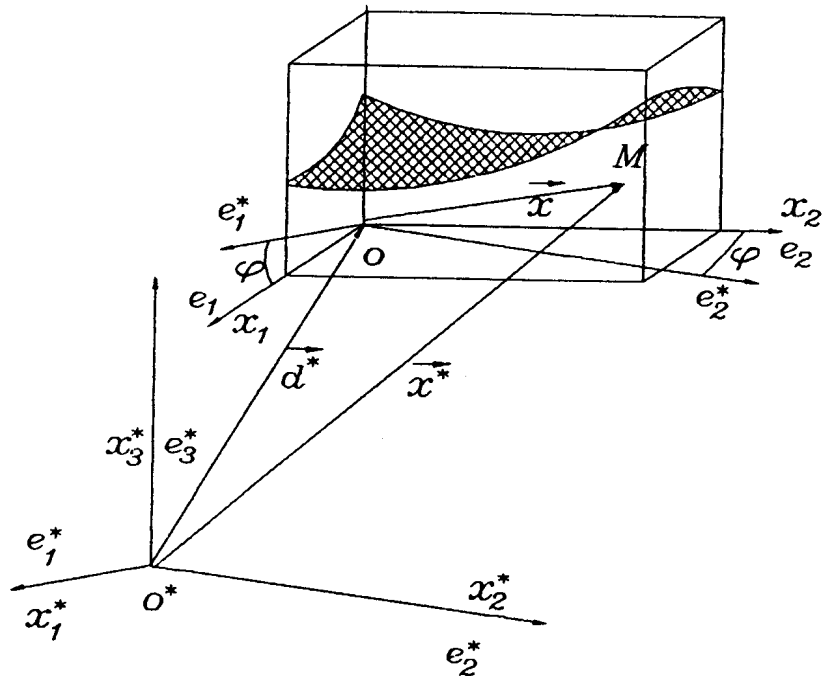


Fig.2 A moving coordinate system 1 and a moving coordinate system 2.

측자 o^* 가 측정한 탱크내 유체점 M 의 위치벡터를 표시하고, \vec{d}^* 는 관측자 o^* 가 측정한 관측자 o 의 위치벡터이다. 그리고 \vec{x} 는 관측자 o 가 측정한 탱크내 유체점 M 의 위치벡터이다. 관측자 o 와 관측자 o^* 가 측정한 탱크내 유체점 M 은 동일점이므로 다음 관계를 만족한다.

$$x_j^* = d_j^* + S_{jn} x_n \quad (11)$$

여기서

$$S_{jn} = e_j^* e_n \quad (12)$$

S 는 o 에서 o^* 로의 선형위상이며 등각직교 2차텐서이다. 그리고 관측자 o 와 관측자 o^* 는 서로 동일한 운동을 하므로 상대위치 \vec{d}^* 와 선형위상 S 는 시간에 무관하다. 식 (11)로 부터 두 관측자가 측정한 유체의 속도와 가속도는 각각 다음과 같은 관계가 있다.

$$u_j^* = S_{jn} u_n \quad (13)$$

$$a_j^* = S_{jn} a_n \quad (14)$$

식 (11), (13), (14)를 식 (9), (10)에 대입하면 다음과 같다.

$$S_{kn} a_n = Q_{ik}(A_i - B_i) + f_k^* \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_k^* = & Q_{ik}(B_i - \ddot{R}_i) - Q_{ik} \ddot{Q}_{ij}(d_j^* + S_{jn} x_n) \\ & - 2 Q_{ik} \dot{Q}_{ij} S_{jn} u_n \end{aligned} \quad (16)$$

식 (15), (16)의 양변에 S_{kr} 를 곱하여 첨자 k 를 축약하면 유체의 가속도와 기진력은 탱크에 고정된 좌표계로 다음과 같이 표시된다.

$$a_r = S_{kr} Q_{ik} (A_i - B_i) + f_r \quad (17)$$

$$f_r = S_{kr} f_k^* \quad (18)$$

식 (2)의 A_i 를 식 (17)에 대입하면 식 (17)은 식 (3)이 되는데 그것이 탱크에 고정된 동요좌표계에서 기술한 Navier-Stokes 방정식이고, 식 (18)이 바로 슬로싱을 발생시키는 기진력이 된다.

3.3 동요좌표계에서 측정되는 기진력

x_1^* 축을 기준으로 θ_1 만큼 회전시켰을 때 선형위상을 X 로 표시하고, x_2^* 축을 기준으로 θ_2 만큼 회전시켰을 때 선형위상을 Y 로, x_3^* 축을 기준으로 θ_3 만큼 회전시켰을 때 선형위상을 Z 로 각각 표시하면 Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 로 부터 선형위상들은 각각 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \theta_1(t) \quad (19)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \theta_2(t) \quad (20)$$

$$Z = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_3 = \theta_3(t) \quad (21)$$

그리고 Fig. 6 으로 부터 선형위상 S 는 다음과 같다.

$$S = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \text{constant} \quad (22)$$

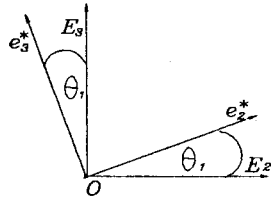


Fig.3 Rotation about the x_1^* axis.

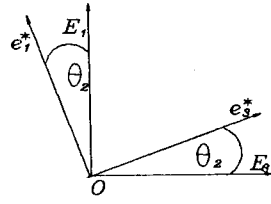


Fig.4 Rotation about the x_2^* axis.

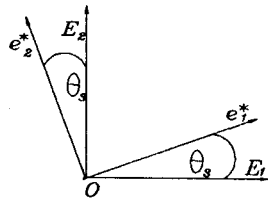


Fig.5 Rotation about the x_3^* axis.

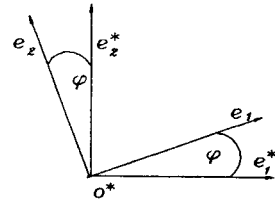


Fig.6 Setting angle.

회전동요가 x_1^* 축에 대해서 발생하고 연이어서 x_2^* 축, x_3^* 축에 대해서 발생했다면 선형위상 Q 는 다음과 같다.

$$Q = XYZ \quad (23)$$

선형위상 Q 의 1계 도함수와 2계 도함수는 각각 다음과 같다.

$$\dot{Q} = \dot{X}YZ + X\dot{Y}Z + XY\dot{Z} \quad (24)$$

$$\ddot{Q} = \ddot{X}YZ + X\ddot{Y}Z + XY\ddot{Z} + 2\dot{X}\dot{Y}Z + 2\dot{X}Y\dot{Z} + 2X\dot{Y}\dot{Z} \quad (25)$$

식 (23), (24) 및 (25)를 식 (10)에 대입하면 선체의 무게중심에 고정된 동요좌표계에서 측정된 기진력을 얻을 수 있고 각 성분을 열거하면 다음과 같다. 여기서 수치 시뮬레이션을 위해서 편의상 첨자 1, 2, 3 대신에 x, y, z 로 표기하였고 x, y, z 방향의 속도는 각각 u, v, w 로 표기하였다.

$$\begin{aligned}
 f_x^* = & (B_x - \ddot{R}_x) \cos \theta_y \cos \theta_z + (B_y - \ddot{R}_y) \cos \theta_x \sin \theta_z \\
 & + (B_y - \ddot{R}_y) \sin \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z + (B_z - \ddot{R}_z) \sin \theta_x \sin \theta_z \\
 & - (B_z - \ddot{R}_z) \cos \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z \\
 & + (\omega_y^2 + \omega_z^2 - 2\omega_x \omega_y \cos \theta_y \sin \theta_z \cos \theta_z + 2\omega_z \omega_x \sin \theta_y) x^* \\
 & + (\dot{\omega}_x \sin \theta_y + \dot{\omega}_z + 2\omega_x \omega_y \cos \theta_y \sin^2 \theta_z) y^* \\
 & + (\dot{\omega}_x \cos \theta_y \sin \theta_z - \dot{\omega}_y \cos \theta_z - 2\omega_x \omega_y \sin \theta_y \sin \theta_z) z^* \\
 & + 2(\omega_z + \omega_x \sin \theta_y) v^* + 2(\omega_x \cos \theta_y \sin \theta_z - \omega_y \cos \theta_z) w^*
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 f_y^* = & -(B_x - \ddot{R}_x) \cos \theta_y \sin \theta_z + (B_y - \ddot{R}_y) \cos \theta_x \cos \theta_z \\
 & - (B_y - \ddot{R}_y) \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z + (B_z - \ddot{R}_z) \sin \theta_x \cos \theta_z \\
 & - (B_z - \ddot{R}_z) \cos \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z \\
 & - (\dot{\omega}_x \sin \theta_y + \dot{\omega}_z + 2\omega_x \omega_y \cos \theta_y \cos^2 \theta_z) x^* \\
 & + (\omega_x^2 + \omega_z^2 + 2\omega_x \omega_y \cos \theta_y \sin \theta_z \cos \theta_z + 2\omega_z \omega_x \sin \theta_y) y^* \\
 & + (\dot{\omega}_x \cos \theta_y \cos \theta_z + \dot{\omega}_y \sin \theta_z - 2\omega_x \omega_y \sin \theta_y \cos \theta_z) z^* \\
 & - 2(\omega_x \sin \theta_y + \omega_z) u^* + 2(\omega_x \cos \theta_y \cos \theta_z + \omega_y \sin \theta_z) w^*
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 f_z^* = & (B_x - \ddot{R}_x) \sin \theta_y - (B_y - \ddot{R}_y) \sin \theta_x \cos \theta_y \\
 & + (B_z - \ddot{R}_z) \cos \theta_x \cos \theta_y \\
 & - (\dot{\omega}_x \cos \theta_y \sin \theta_z - \dot{\omega}_y \cos \theta_z + 2\omega_z \omega_x \cos \theta_y \cos \theta_z \\
 & + 2\omega_y \omega_z \sin \theta_z) x^* - (\dot{\omega}_x \cos \theta_y \cos \theta_z + \dot{\omega}_y \sin \theta_z \\
 & - 2\omega_z \omega_x \cos \theta_y \sin \theta_z + 2\omega_y \omega_z \cos \theta_z) y^* \\
 & + (\omega_x^2 + \omega_y^2) z^* - 2(\omega_x \cos \theta_y \sin \theta_z - \omega_y \cos \theta_z) u^* \\
 & - 2(\omega_x \cos \theta_y \cos \theta_z + \omega_y \sin \theta_z) v^* \tag{28}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\omega_x = \dot{\theta}_x, \omega_y = \dot{\theta}_y, \omega_z = \dot{\theta}_z \tag{29}$$

그리고 탱크에 고정된 동요좌표계에서 기진력을 얻기 위해서 우선 식 (11), (13) 과 식 (22)로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x^* &= d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\
 y^* &= d_y + x \sin \varphi + y \cos \varphi \tag{30}
 \end{aligned}$$

$$z^* = d_z + z$$

$$\begin{aligned}
 u^* &= u \cos \varphi - v \sin \varphi \\
 v^* &= u \sin \varphi + v \cos \varphi \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$w^* = w$$

그리고 식 (16)에서 보여진 것 처럼 식 (30)과 (31)를 식 (26), (27) 및 식 (28) 에 대입한 뒤 그것을 식 (18)에서 보여진 것 처럼 좌표변환을 하면 다음과 같이 탱크에 고정된 좌표계에서 측정된 기진력을 구할 수 있다.

$$f_x = f_x^* \cos \varphi + f_y^* \sin \varphi \quad (32)$$

$$f_y = -f_x^* \sin \varphi + f_y^* \cos \varphi \quad (33)$$

$$f_z = f_z^* \quad (34)$$

4. 기진력의 2차원화 및 고찰

탱크의 동요가 z 면에서만 발생한다면 식 (26), (27) 및 (28)에서 $\theta_x = 0$, $\theta_y = 0$ 그리고 $\ddot{R}_z = 0$ 이다. 그리고 좌표계 (o^*, x^*, y^*, t) 와 좌표계 (o, x, y, t) 의 기저가 같다면 $\varphi = 0$ 이다. 이것을 식 (32), (33) 및 (34)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$f_x = (B_x - \ddot{R}_x) \cos \theta_z + (B_y - \ddot{R}_y) \sin \theta_z + \dot{\omega}_z (d_y + y) + \omega_z^2 (d_x + x) + 2 \omega_z v \quad (35)$$

$$f_y = -(B_x - \ddot{R}_x) \sin \theta_z + (B_y - \ddot{R}_y) \cos \theta_z - \dot{\omega}_z (d_x + x) + \omega_z^2 (d_y + y) - 2 \omega_z u \quad (36)$$

$$f_z = 0 \quad (37)$$

여기서 Y 축을 중력방향으로 취했다면 $B_x = 0$, $B_y = g$ 그리고 원점 o^* 와 원점 o 가 일치한다면 $d_x = 0$, $d_y = 0$ 이다. 그러므로 식 (35), (36)은 다음과 같이 표시된다.

$$f_x = -\ddot{R}_x \cos \theta_z + (g - \ddot{R}_y) \sin \theta_z + \dot{\omega}_z y + \omega_z^2 x + 2 \omega_z v \quad (38)$$

$$f_y = \ddot{R}_x \sin \theta_z + (g - \ddot{R}_y) \cos \theta_z - \dot{\omega}_z x + \omega_z^2 y - 2 \omega_z u \quad (39)$$

식 (38), (39)는 이판목 외(1988) 과 김용환 외(1992) 에서 사용한 기진력과 일치한다. 혹은 x 면이나 y 면에서만 탱크의 동요가 발생한다고 가정해도 동일한 결과를 얻는다 (Fig. 7 참조).

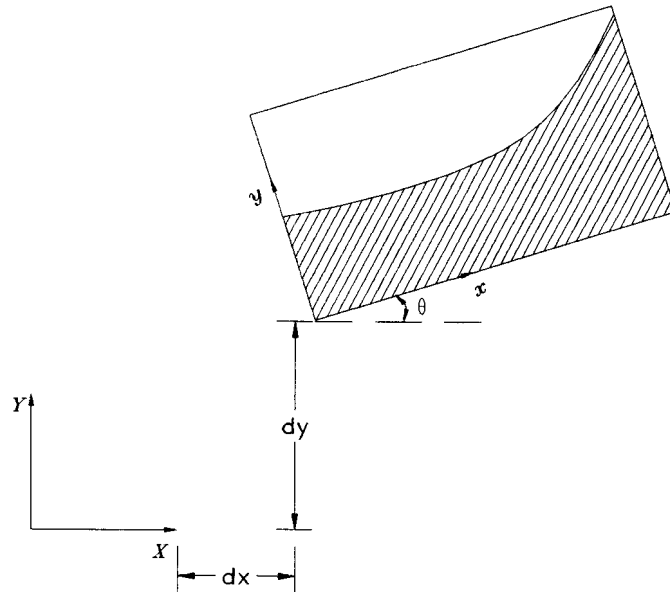


Fig.7 Coordinate transformation 1

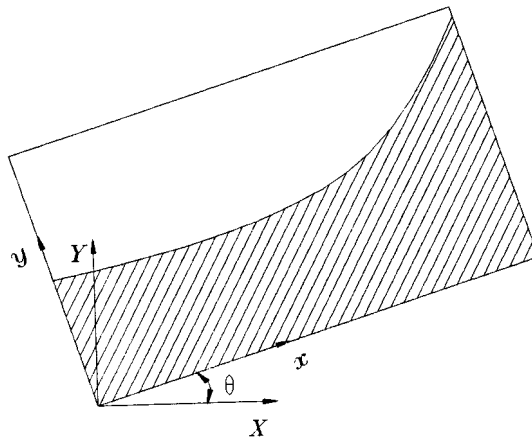


Fig.8 Coordinate transformation 2

한편 Arai(1986)에서는 오직 탱크의 회전동요만을 고려해서 2차원 문제를 연구한 적이 있는데 이 경우 병진동요가속도는 $\ddot{R}_x = 0, \ddot{R}_y = 0$ 이다. 그리고 Y 축을 중력의 반대방향으로 취했는데 이것으로 부터 $B_x = 0, B_y = -g$ 이다. 그리고 좌표계 (o^*, x^*, y^*, t) 와 좌표계 (o, x, y, t) 는 앞서와 같이 서로 동일한 것으로 했다. 즉, $d_x = 0, d_y = 0$ 이다. 이것을 기진력 (35), (36)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다 (Fig. 8 참조).

$$f_x = -g \sin \theta_z + \dot{\omega}_z y + \omega_z^2 x + 2 \omega_z v \quad (40)$$

$$f_y = -g \cos \theta_z - \dot{\omega}_z x + \omega_z^2 y - 2 \omega_z u \quad (41)$$

이것은 Arai(1986)에서 사용한 기진력과 일치한다.

그리고 Su et al.(1982)에서도 탱크의 회전동요만을 고려한 2차원 문제를 연구한 적이 있었는데 선체의 임의의 위치에 있는 탱크내 슬로싱을 기술하기 위해서 선체의 무게중심에 설정한 동요좌표계와 탱크에 고정된 동요좌표계는 다른 것으로 했다. 즉 두 좌표계의 원점은 X 방향으로 $d \cos \psi$, Y 방향으로 $d \sin \psi$ 만큼 떨어진 것으로 했다. 그리고 Y 축을 중력과 같은 방향으로 했다. 즉, $d_x^* = d \cos \psi, d_y^* = d \sin \psi, \ddot{R}_x = 0, \ddot{R}_y = 0, B_x = 0$ 및 $B_y = g$ 를 식 (35)과 (36)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$f_x = g \sin \theta_z + \dot{\omega}_z (d \sin \psi + y) + \omega_z^2 (d \cos \psi + x) + 2 \omega_z v \quad (42)$$

$$f_y = g \cos \theta_z - \dot{\omega}_z (d \cos \psi + x) + \omega_z^2 (d \sin \psi + y) - 2 \omega_z u \quad (43)$$

식 (42), (43)은 Su et al.(1982)에서 사용한 기진력과 일치한다

한편 Arai et al.(1992)에서는 3차원 문제를 연구한 바 있는데 회전동요는 x_2^* 축 즉 y^* 에 대해서만 발생하는 것으로 했고 y 축은 y^* 에 대해서 초기에

φ 만큼 기울어져 있다. 그러므로 $\theta_x = 0$, $\theta_y = \theta$, $\theta_z = 0$ 으로 부터 선형위상은 다음과 같이 표시된다. 즉 변환행렬 A 의 성분은 다음과 같다

$$A_{ri} = S_{kr} Q_{ik} \quad \text{또는} \quad A = S^t Q^t = S^t Y^t$$

그러므로

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (44)$$

이것은 Arai et al.(1992) 의 변환행렬과 일치한다. 그리고 중력방향을 음의 z 방향으로 하고 편의상 $\omega_y = \omega$ 를 사용하여 식 (26), (27), (28)의 기진력을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_x^* &= -\ddot{R}_x \cos \theta + (g + \ddot{R}_z) \sin \theta \\ &+ \omega^2 (d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi) - \dot{\omega} (d_z + z) - 2\omega w \end{aligned} \quad (45)$$

$$f_y^* = -\ddot{R}_y \quad (46)$$

$$\begin{aligned} f_z^* &= -\ddot{R}_x \sin \theta - (g + \ddot{R}_z) \cos \theta \\ &+ \omega^2 (d_z + z) + \dot{\omega} (d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi) \\ &+ 2\omega (u \cos \varphi - v \sin \varphi) \end{aligned} \quad (47)$$

그리고 위 식을 식 (32), (33) 및 (34)에 대입하면 Arai et al.(1992) 에서 사용한 기진력을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_x &= \{ (g + \ddot{R}_z) \sin \theta - \ddot{R}_x \cos \theta \\ &+ \omega^2 (d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi) - \dot{\omega} (d_z + z) - 2\omega w \} \cos \varphi \\ &- \ddot{R}_y \sin \varphi \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 f_y = & -\{ (g + \ddot{R}_z) \sin \theta - \ddot{R}_x \cos \theta \\
 & + \omega^2 (d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi) - \dot{\omega} (d_z + z) - 2\omega w \} \sin \varphi \\
 & - \ddot{R}_y \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 f_z = & -\ddot{R}_x \sin \theta - (g + \ddot{R}_z) \cos \theta \\
 & + \omega^2 (d_z + z) + \dot{\omega} (d_x + x \cos \varphi - y \sin \varphi) \\
 & + 2\omega (u \cos \varphi - v \sin \varphi)
 \end{aligned} \tag{50}$$

이상에서 알 수 있는 것 처럼 본 논문에서 유도된 3차원 동요방정식과 기진력은 실제 슬로싱 현상을 수학적으로 표현하는 가장 일반적인 식이라 할 수 있다.

6. 결 론

슬로싱은 부분적재된 탱크가 가속도 동요를 하기 때문에 발생하는데, 슬로싱 현상의 성공적인 시뮬레이션 여부는 일종의 기진력으로 작용하는 탱크의 동요를 얼마만큼 정확히 고려하는가에 달려있다. 이 기진력은 실제 거친 해상상태에서 선체의 연성된 6자유도 동요로 인한 것이어야 한다. 2차원 해석으로는 선체의 연성된 6자유도 동요를 고려하는 것이 불가능하기 때문에 슬로싱 현상을 명확히 시뮬레이션하기 위해서는 3차원 해석이 요구된다.

본 연구는 선체의 연성된 6자유도 동요로 인한 기진력을 유도하는데 목적을 두었고 그 결과를 몇 가지 특수한 경우로 단순화시켰을 때 그러한 경우에 사용되어온 기진력과 정확히 일치함을 보였다. 그리고 일반성을 위해서 탱크의 배치, 위치는 가능한 실제 선체에서의 상태와 동일하게 하였으며 편이성과 탱크 벽면에서 발생하는 비선형성을 피하기 위해서 탱크에 고정되어 탱크와 동일한 동요를 하는 좌표계를 사용했다.

참고문헌

- Arai, M., 1986. "Experimental and Numerical Studies of Sloshing in Liquid Cargo Tanks with Internal Structures", IHI Engineering Review, Vol.19, No.2, p51-56.
- Arai, M., Cheng, L.Y. and Inoue, Y., 1992. "3D Numerical Simulation of Impact Load due to Liquid Cargo Sloshing", Journal of The Society of Naval Architects of Japan, Vol.171, p177-184.
- Faltinsen, O.M., 1974. "A Nonlinear Theory of Sloshing in Rectangular Tanks", Journal of Ship Research, Vol.18, No.4, p224-241.
- Faltinsen, O.M., 1978. "A Numerical Nonlinear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow," Journal of Ship Research, Vol.22, No.3, p.193-202.
- Hirt, C.W., Nichols, B.D. and Romero, N.C., 1975. "SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows", Los Alamos Scientific Lab. Report LA-5852.
- Iseki, T. and Shinkai, A., 1988. "Boundary Element Analysis of Non-linear Sloshing Problems Using Cubic Element", 日本造船學會論文集 163 號, p294-302.
- Kang, S.Y., 1984. "Analysis of Liquid Impact on Moving Containers", Master Thesis, Florida Atlantic University.
- Lou, K., Wu, M.C. and Lee, C.K., 1985. "Further Studies on Liquid Sloshing." Maritime Administration Report No. MA-RD-760-85009.
- Malvern, L.E., 1969. INTRODUCTION TO THE MECHANICS OF A CONTINUOUS MEDIUM, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mikelis, N.E., Miller, J.K. and Taylor, K.V., 1984. "Sloshing in Partially Filled Liquid Tanks and its Effect on Ship Motions: Numerical Simulation and Experimental Verifications", Proceeding RINA, Spring Meeting.

- Nichols, B.D., Hirt, C.W. and Hotchkiss, R.S., 1980. "SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries", Los Alamos Scientific Lab. Report LA-8355.
- Ogden, R.W., 1984. NON-LINEAR ELASTIC DEFORMATIONS, John Wiley & Sons Inc. New York.
- Pantazopoulos, M., 1988. "Three-Dimensional Sloshing of Water on Decks," Journal of Maritime Technology, Vol.25 No.4, p.253-261.
- Sokolnikoff, I.S., 1964. TENSOR ANALYSIS, John Wiley & Sons Inc. New York.
- Su, T.C. and Kang, S.Y., 1986. "Analysis and Testing of the Large Amplitude Liquid Sloshing in Rectangular Containers", ASME PVP Conference, Vol.108, p145-154.
- Su, T.C. and Kang, S.Y., 1984. "Numerical Simulation of Liquid Sloshing", ASCE, Engineering Mechanics in Civil Engineering, Vol.2.
- Su, T.C., Lou, Y.K., Flipse, J.E. and Bridge, T., 1982. "A Numerical Analysis of Large Amplitude Liquid Sloshing in Baffled Containers", Report No. MA-RD-940-82046, U.S. DOT, Maritime Administration.
- 강신영, 박한일, 1987. "Two Dimensional Numerical Simulation of Liquid Sloshing", 한국해양공학회지 제2권 1호, p78-82.
- 김용환, 박용진, 1992. "수치기법을 이용한 Sloshing 문제의 해석", 대한조선학회논문집 제29권 3호, p33-44.
- 이판목, 홍석원, 홍사영, 1988. "탱크내 유동해석 연구", 한국기계연구소 연구보고서, UCE413-1302D.
- 이판목, 홍석원, 홍사영, 1990. "Lagrangian 유한요소법을 이용한 2차원 탱크내 유동해석", 대한조선학회지, 제27권, 제2호, p.21-30.
- 이판목, 홍석원, 홍사영, 1990. "구조물의 탄성을 고려한 2차원 탱크내 유동해석", 대한조선학회지 제27권 3호, p107-116.
- 황종홀, 김일수, 설영수, 이세창, 전영기, 1991. "3차원 탱크내에서의 액체 슬로싱의 수치 해석", 대한조선학회논문집 제28권 1호, p12-18.