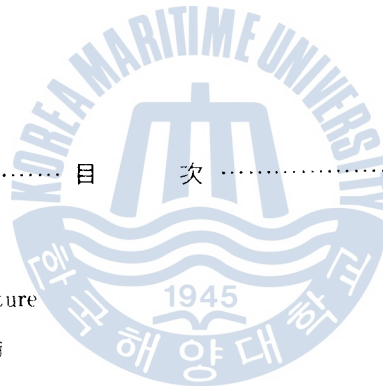


圓形孔을 가진 보의 應力分布와 塑性域 傳播舉動에 關한 研究

李 京 浩

A Study on the Stress Distribution and Plastic Area
Propagation in Beam with a Circular Hole

Kyeong-ho Lee



目 次

- Abstract
- Nomenclature
1. 序 論
 2. 彈性解
 2. 1 極座標에 의한 2次元 應力解析
 2. 2 級數形 一般應力函數에 의한 解法
 2. 3 解析對象 및 境界條件
 2. 4 境界條件의 適用 및 結果
 3. 應力分布
 4. 塑性域傳播舉動
 5. 實 驗
 6. 結 論
- 參考文獻

A Study on the Stress Distribution and Plastic Area Propagation in Beam with a Circular Hole

Lee, Kyeong-Ho

Abstract

The beams with a circular hole are often used for constructing structures. The center of the circular hole is normally located in neutral axis and the stress state around the hole due to bending moment is trivial. But the stress level around the hole due to shear force is expected to be significant especially in the case of beams made of shape steels.

In this paper, the stress distribution around the circular hole of beams was presented. Using polar coordinates and generalized stress function, the formulas of stress components were derived. The aspect of plastic area propagation based on von Mises yield criteria was also shown graphically.

In order to verify the formulas presented in this paper, a beam of I-shape steel with a circular hole was made and the strains around the hole were measured under various loading condition. The experimental results were proved to coincide fairly well with the calculated values.

Nomenclature

- x, y, z : Rectangular coordinates
 r, θ : Polar coordinates
 a : Radius of hole (mm)
 b : Radius of circle for boundary condition (mm)
 ϕ : Generalized stress function
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$: Stress components in polar coordinates (kg/mm²)
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$: Strain components in polar coordinates
 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: Stress components in Cartesian coordinates (kg/mm²)
 u_1 : Strain energy per unit volume (kg·mm/mm³)
 σ_e : Equivalent stress (kg/mm²)
 σ_0 : Yield stress of material in simple tension (kg/mm²)
 F : Shear coefficient
 V : Shear force (kg)
 M : Bending moment (kg·mm)
 V_0 : Shear force at hole center (kg)
 M_0 : Bending moment at hole center (kg·mm)
 I : Moment of inertia of cross section (mm⁴)
 A : Cross sectional area (mm²)
 E : Modulus of elasticity (kg/mm²)
 ν : Poisson's ratio of materials
 t : Thickness (mm)
 G : Shear modulus (kg/mm²)
 τ_{\max} : Maximum shear stress (kg/mm²)
 τ_{mean} : Mean shear stress (kg/mm²)

1. 序 論

形鋼을 利用하여 構造物을 組立할 때에는 熔接에 의하는 때도 있겠으나, 圓形孔을 뚫고 볼트와 너트를 利用하는 境遇도 많다. 後者의 境遇에 圓形孔은 -notch 役割을 하게 되고 反復荷重이나 交番荷重을 받는 構造物일 때는 龜裂源이 되기도 한다. 따라서 이 圓形孔 周圍의 應力을 正確히 把握하여 適切한 對策을 세울 必要가 있다.

圓形孔 周圍의 應力解析은 單純引張, 純粹굽힘, 純粹剪斷, 二軸應力狀態 等の 境遇에 대하여서는 이미 發表되어 있고,^{1)~6)} 이들의 組合에 의한 應力分布는 重疊法에 의하여 구할 수 있다.⁶⁾ 그러나 이들의 組合만으로 求할 수 없는 境遇도 많은데 굽힘모우멘트와 剪斷力을 同時에 받는 보가 그 一例이다. 剪斷力이 있다는 것은 굽힘모우멘트의 크기가 各 斷面에 따라 달라진다는 것을 意味하고 굽힘모우멘트에 의한 垂直應力의 分布는 斷面의 位置에 따라 달라진다. 또한 剪斷力에 의한 剪斷應力의 分布는 대체로 拋物線形으로 中立面에서 最大가 된다는 것은 잘 알려진 事實이다.

一般的으로 보의 應力은 剪斷力에 의한 應力보다 굽힘모우멘트에 의한 應力이 월등히 크므로 剪斷力에 의한 應力은 無視하고 보를 設計한다. 그러므로 보에 圓形孔을 뚫을 때는 굽힘모우멘트에 의한 垂直應力이 零이 되는 中立面에 中心이 位置하도록 한다. 그러나, 形鋼과 같이 剪斷力에 의한 剪斷應力이 굽힘모우멘트에 의한 垂直應力에 비하여 無視할 수 없을 만큼 될 때, 剪斷應力이 最大가 되는 中立面에 圓形孔의 中心이 位置한다면 보의 強度가 더 低下될 可能性이 있으며 가장 큰 強度를 위하여서는 孔의 位置를 바꿀 必要가 있다.

本 研究에서는 圓形孔을 가진 形鋼을 보로 使用할 境遇 圓形孔 周圍의 應力分布를 極座標를 利用하여 解析하였다. 應力函數는 級數形의 一般應力函數를 利用하였고, 굽힘모우멘트에 의한 垂直應力과 剪斷力에 의한 剪斷應力을 極座標를 利用하는 應力成分들로 換算하여, 境界條件을 滿足하도록 一般應力函數의 各係數를 定하는 方法을 썼으며⁷⁾ 이 應力函數에 따라서 圓形孔 周圍의 應力成分들을 理論式으로 提示하였다. 또한 이들 式을 Von Mises의 塑性變形判別式에 代入하여 等價應力을 구하고 이로부터 塑性域傳播學動을 推定하였다.

本 研究에서 提示한 理論式들의 信憑性을 檢討하기 위하여 I形鋼으로 圓形孔을 가진 보를 製作하고 굽힘모우멘트와 剪斷力을 作用시켜 圓形孔 周圍의 스트레인을 測定하였으며 理論式에 의한 解析 結果와 比較하였다. 굽힘모우멘트와 剪斷力은 本 實驗室에서 製作한 引張機를 利用하여 加하였으며, 스트레인은 圓形孔 周圍의 원하는 位置에 스트레인게이지를 붙이고 디지털스트레인測定器로 測定하였다.

2. 彈 性 解

2.1 極座標에 의한 2次元 應力解析

極座標을 利用한 2次元 應力解析을 위한 平衡方程式은 物體力을 無視한 境遇 다음과 같이 된다.²⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

이들 平衡方程式은 應力函數 $\phi(r, \theta)$ 를 定義하고 應力成分들을 다음과 같이 놓으므로 恒常 成立한다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

한편 스트레인 成分들 사이에 成立해야 하는 適合條件式을 應力成分으로 表示하면 다음과 같이 된다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (3)$$

式(2)를 式(3)에 代入하면 極座標을 利用한 2次元 應力解析을 위한 微分方程式을 얻는다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4)$$

式(4)로부터 境界條件을 滿足하도록 ϕ 를 구하여 式(2)에 代入하면 應力成分들을 구할 수 있으며 이를 다음式에 代入하여 스트레인 成分들을 구한다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 ν 는 poisson比이고 E 는 縱彈性係數이며 G 는 橫彈性係數이다.

2.2 級數形 一般應力函數에 의한 解法

微分方程式 (4)를 滿足하는 一般應力函數 $\phi(r, \theta)$ 를 다음과 같이 級數形態로 놓고 이 級數의 各

係數를 ϕ 가 特定한 問題의 境界條件을 滿足하도록 정하면 원하는 解가 구하여 진다.⁷⁾

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$a_n, b_n, c_n, d_n, a_n', b_n', c_n', d_n'$ 는 境界條件에 의하여 決定되는 常數이다.

式 (6)을 式 (2)에 代入하므로써 應力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 에 대한 一般解를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_r = & (2b_1 r - 2a_1' r^{-3} + b_1' r^{-1}) \cos \theta + (2d_1 r - 2c_1' r^{-3} + d_1' r^{-1}) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n-n^2) a_n r^{n-2} + (2+n-n^2) b_n r^n - (n+n^2) a_n' r^{-n-2} + (2-n-n^2) b_n' r^{-n} \} \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n-n^2) c_n r^{n-2} + (2+n-n^2) d_n r^n - (n+n^2) c_n' r^{-n-2} + (2-n-n^2) d_n' r^{-n} \} \sin n\theta \\ \sigma_\theta = & (6b_1 r + 2a_1' r^{-3} + b_1' r^{-1}) \cos \theta + (6d_1 r + 2c_1' r^{-3} + d_1' r^{-1}) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ n(n-1) a_n r^{n-2} + (n+1)(n+2) b_n r^n + n(n+1) a_n' r^{-n-2} + (n-1)(n-2) b_n' r^{-n} \} \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ n(n-1) c_n r^{n-2} + (n+1)(n+2) d_n r^n + n(n+1) c_n' r^{-n-2} + (n-1)(n-2) d_n' r^{-n} \} \sin n\theta \\ \tau_{r\theta} = & (2b_1 r - 2a_1' r^{-3} + b_1' r^{-1}) \sin \theta - (2d_1 r - 2c_1' r^{-3} + d_1' r^{-1}) \cos \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} n \{ (n-1) a_n r^{n-2} + (n+1) b_n r^n - (n+1) a_n' r^{-n-2} - (n-1) b_n' r^{-n} \} \sin n\theta \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} n \{ (n-1) c_n r^{n-2} + (n+1) d_n r^n - (n+1) c_n' r^{-n-2} - (n-1) d_n' r^{-n} \} \cos n\theta \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 解析對象 및 境界條件

보에 任意의 荷重이 作用할 때, 그림 1에서 圓孔의 中心인 任意의 點 0를 지나는 y 軸에서 굽힘모우멘트를 M_0 , 剪斷力을 V_0 라 하고, 點 0를 原點으로 半徑 a 인 圓孔 周圍의 應力分布를 解析對象으로 한다.

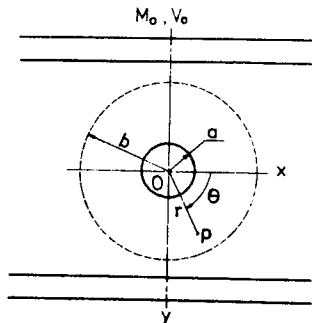


Fig. 1 Polar coordinates around the hole

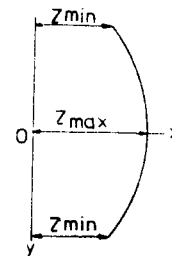


Fig. 2 Distribution of shear stress in the web of I-beam

보에 荷重이 作用할 때 圓孔이 없는 境遇에 應力과 荷重과의 關係式은 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_y = 0 \tag{8}$$

여기서 M 은 굽힘모멘트 I 는 斷面2次모멘트 y 는 中立軸에서부터 垂直距離이다.

보의 全區間에서 剪斷力 V 가 一定하다면 굽힘모멘트와 剪斷力과의 關係는 다음과 같다.

$$M = V_0 x + M_0 \tag{9}$$

式(9)를 式(8)에 代入하면

$$\sigma_x = \frac{V_0}{I} xy + \frac{M_0}{I} y \tag{10}$$

一般的으로 剪斷應力 τ_{xy} 는 中立軸으로부터의 距離 y 값에 따라 Fig. 2와 같은 拋物線 形態를 가지므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{xy} = V_0(\alpha y^2 + \beta) \tag{11}$$

α, β 는 斷面の 形狀에 의하여 決定되는 常數이다.

應力을 받고 있는 板에 圓形孔을 뚫으면 應力分布가 달라진다. 이 應力場의 變化를 가지도록 範圍는 大略 圓形孔의 中心으로부터 孔半徑의 5배되는 距離까지이며 그 以上되는 距離에서는 圓形孔을 뚫어도 應力의 變化가 實用上 거의 없다는 報告가 있다.^(9,10) 그러므로 孔의 中心으로부터 孔의 半徑에 比하여 充分히 큰 距離 ($b > 5a$)를 半徑으로 하는 圓을 境界圓으로 하는 境界條件을 考한다. 座標界를 Fig. 1과 같이 定하면 境界圓에서의 應力成分들은 直角座標로 表示하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{r=a} &= \frac{V_0}{I} b^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{M_0}{I} b \sin \theta \\ (\sigma_y)_{r=a} &= 0 \\ (\tau_{xy})_{r=a} &= V_0(\alpha b^2 \sin^2 \theta + \beta) \end{aligned} \tag{12}$$

式(12)를 極座標의 應力成分들로 바꾸면

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= \frac{M_0 b}{4I} \sin \theta + \left(-\frac{V_0 b^2}{4I} + \frac{V_0 \alpha b^2}{2} + V_0 \beta \right) \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{M_0 b}{4I} \sin 3\theta + \left(-\frac{V_0 b^2}{8I} - \frac{V_0 \alpha b^2}{4} \right) \sin 4\theta \\ (\sigma_\theta)_{r=a} &= \frac{3M_0 b}{4I} \sin \theta + \left(\frac{V_0 b^2}{4I} - \frac{V_0 \alpha b^2}{2} - V_0 \beta \right) \sin 2\theta \\ &\quad - \frac{M_0 b}{4I} \sin 3\theta + \left(-\frac{V_0 \alpha b^2}{4} - \frac{V_0 b^2}{8I} \right) \sin 4\theta \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= -\frac{V_0 \alpha b^2}{4} - \frac{V_0 b^2}{8I} - \frac{M_0 b}{4I} \cos \theta + \left(\frac{V_0 \alpha b^2}{2} + V_0 \beta \right) \cos 2\theta \\ &\quad + \frac{M_0 b}{4I} \cos 3\theta + \left(\frac{V_0 b^2}{8I} - \frac{V_0 \alpha b^2}{4} \right) \cos 4\theta \end{aligned} \tag{13}$$

과 같이 된다. 한편 半徑 b 인 圓이 平衡을 維持하고 있으므로

$$\int_0^{2\pi} (\tau_{r\theta})_{r=a} b d\theta = 0 \tag{14}$$

이 成立하고 式(13)의 세번째 式을 式(14)에 代入하면 α 를 구할 수 있다. 즉

$$\alpha = -\frac{1}{2I} \quad (15)$$

또한 中立面($y=0$)에서 最大剪斷應力이 發生하고 式(11)로 부터 β 를 구하면

$$\beta = \frac{\tau_{max}}{V_0} = \frac{\tau_{max}}{A\tau_{mean}} = \frac{F}{A} \quad (16)$$

가 된다. τ_{max} 는 最大剪斷應力으로 中立面에서의 剪斷應力이며 τ_{mean} 은 平均剪斷應力, F 와 A 는 各各 剪斷係數와 斷面積이다.

한편 孔境界面 즉 $r=a$ 인 面이 自由面이 되므로 다음과 같은 境界條件이 追加된다.

$$(\sigma_r)_{r=a} = (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \quad (17)$$

따라서 式(13)과 式(17)의 境界條件이 滿足되도록 式(7)의 常數들 $a_n, b_n, c_n, d_n, a_n', b_n', c_n', d_n'$ 를 정하면 여기서 구하고자 하는 圓孔周圍의 應力分布를 얻을 수 있다.

2.4 境界條件의 適用 및 結果

式(7)을 式(13), (17)에 適用하면 $n=1, 2, 3, 4$ 에 대하여 다음과 같은 聯立方程式이 얻어진다.
 $n=1$ 일 때

$$\begin{aligned} 2ad_1 - \frac{2}{a^3}c_1' + \frac{d_1'}{a} &= 0 \\ 2bd_1 - \frac{2}{b^3}c_1' + \frac{d_1'}{b} &= \frac{M_0b}{4I} \\ 6bd_1 + \frac{2}{b^3}c_1' + \frac{d_1'}{b} &= \frac{3M_0b}{4I} \end{aligned} \quad (18)$$

$n=2$ 일 때

$$\begin{aligned} -2c_2 - \frac{6}{a^4}c_2' - \frac{4}{a^2}d_2' &= 0 \\ c_2 + 3a^2d_2 - \frac{3}{a^4}c_2' - \frac{d_2'}{a^2} &= 0 \\ -2c_2 - \frac{6}{b^4}c_2' - \frac{4}{b^2}d_2' &= V_0\beta \\ -2c_2 - 6b^2d_2 + \frac{6}{b^4}c_2' + \frac{2}{b^2}d_2' &= \frac{V_0\alpha b^2}{2} + V_0\beta \end{aligned} \quad (19)$$

$n=3$ 일 때

$$\begin{aligned} -6ac_3 - 4a^3d_3 - \frac{12}{a^5}c_3' - \frac{10}{a^3}d_3' &= 0 \\ 2ac_3 + 4a^3d_3 - \frac{4}{a^5}c_3' - \frac{2}{a^3}d_3' &= 0 \\ -6bc_3 - 4b^3d_3 - \frac{12}{b^5}c_3' - \frac{10}{b^3}d_3' &= \frac{M_0b}{4I} \\ -6bc_3 - 12b^3d_3 + \frac{12}{b^5}c_3' + \frac{6}{b^3}d_3' &= \frac{M_0b}{4I} \end{aligned} \quad (20)$$

$n=4$ 일 때

$$\begin{aligned}
 -12a^2c_4 - 10a^4d_4 - \frac{20}{a^6}c_4' - \frac{18}{a^4}d_4' &= 0 \\
 3a^2c_4 + 5a^4d_4 - \frac{5}{a^6}c_4' - \frac{3}{a^4}d_4' &= 0 \\
 -12b^2c_4 - 10b^4d_4 - \frac{20}{b^6}c_4' - \frac{18}{b^4}d_4' &= \frac{V_0b^2}{8I} - \frac{V_0\alpha b^2}{4} \\
 -12b^2c_4 - 20b^4d_4 + \frac{20}{b^6}c_4' + \frac{12}{b^4}d_4' &= \frac{V_0b^2}{8I} - \frac{V_0\alpha b^2}{4}
 \end{aligned} \tag{21}$$

b 가 充分히 크다는 점을 勘案하여 式(18)로부터

$$c_1' = -\frac{M_0a^4}{8I}, \quad d_1 = -\frac{M_0}{8I}, \quad d_1' = 0 \tag{22}$$

과 同様, 같은 方法으로 式(19), (20), (21)으로 부터 各 係數들을 求하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{V_0\beta}{2}, \quad d_2 = -\frac{V_0\alpha}{12}, \quad c_2' = -\frac{V_0\beta a^4}{2} - \frac{V_0\alpha a^6}{6}, \quad d_2' = V_0\beta a^2 + \frac{V_0\alpha a^4}{4} \\
 c_3 &= -\frac{M_0}{24I}, \quad d_3 = 0, \quad c_3' = -\frac{M_0a^6}{12I}, \quad d_3' = -\frac{M_0a^4}{8I} \\
 c_4 &= -\frac{V_0}{48I}, \quad d_4 = 0, \quad c_4' = -\frac{V_0a^8}{16I}, \quad d_4' = -\frac{V_0a^6}{12I}
 \end{aligned} \tag{23}$$

한편,

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0, \quad b_n = 0, \quad a_n' = 0, \quad b_n' = 0 \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \\
 c_n &= 0, \quad d_n = 0, \quad c_n' = 0, \quad d_n' = 0 \quad (n=5, 6, \dots, \infty)
 \end{aligned} \tag{24}$$

일부 簡便 求해진다.

上記의 係數들을 式(7)에 代入하여 整理하면 半徑 a 인 圓孔을 가진 보에서 任意의 點(r, θ)에서 應力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 를 求할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \sin \theta + \frac{M_0}{4I} \left(r + \frac{4a^6}{r^5} - \frac{5a^4}{r^3} \right) \sin 3\theta \\
 &\quad + V_0 \left(\beta + \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} - \frac{4\beta a^2 + \alpha a^4}{r^2} \right) \sin 2\theta \\
 &\quad + \frac{V_0}{4I} \left(r^2 + \frac{5a^8}{r^6} - \frac{6a^6}{r^4} \right) \sin 4\theta \\
 \sigma_\theta &= \frac{M_0}{4I} \left(3r + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin \theta - \frac{M_0}{4I} \left(r + \frac{4a^6}{r^5} - \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 3\theta \\
 &\quad - V_0 \left(\beta + \alpha r^2 + \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} \right) \sin 2\theta \\
 &\quad - \frac{V_0}{4I} \left(r^2 + \frac{5a^8}{r^6} - \frac{2a^6}{r^4} \right) \sin 4\theta \\
 \tau_{r\theta} &= -\frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos \theta + \frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{4a^6}{r^5} + \frac{3a^4}{r^3} \right) \cos 3\theta \\
 &\quad + V_0 \left(\beta + \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} + \frac{4\beta a^2 - \alpha a^4}{2r^2} \right) \cos 2\theta \\
 &\quad + \frac{V_0}{4I} \left(r^2 - \frac{5a^8}{r^6} + \frac{4a^6}{r^4} \right) \cos 4\theta
 \end{aligned} \tag{25}$$

3. 應力分布

圓孔周圍의 應力分布를 圖示하기 위하여 Table 1과 같은 物性値와 幾何的 形狀을 가진 形鋼에 式(25)를 利用하여 應力分布를 구하였다. 荷重狀態는 剪斷力만 作用할 때, 굽힘모우멘트만 作用할 때, 剪斷力과 굽힘모우멘트가 同時에 作用할 때의 세 境遇에 대하여 各各의 應力分布를 圖示하였다.

Fig. 3은 半徑이 5mm인 圓孔에 대하여 圓孔周圍에서 圓周方向應力 σ_θ 가 r 이 一定할 때 角度 θ 에 따라 變化하는 樣相을 나타내며, 가로축은 角度 θ , 세로축은 應力값을 表示한다. 剪斷力만 作用할 때에는 θ 가 $45^\circ, 225^\circ$ 에서 最大壓縮應力을 받고, θ 가 $135^\circ, 315^\circ$ 에서 最大引張應力을 받는다. 굽힘모우멘트만이 作用할 때에는 θ 가 $90^\circ, 270^\circ$ 에서 最大絶對值를 나타내며, 剪斷力과 굽힘모우멘트가 同時에 作用할 때에는 두 경우를 重疊시킨 것과 같은 값을 알 수 있다. 세가지 경우 모두 圓孔가 장자리 즉 $r=a$ 에서 應力의 絶對值가 가장 크고 가장자리로부터 멀어질수록 작아짐을 볼 수 있다.

Fig. 4, 5, 6은 圓孔의 半徑이 2.5mm, 5mm일 때 θ 가 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 方向에 있어서 中心으로부터 距離 r 에 따라 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_e^*$ 의 값이 變化하는 樣相을 나타낸다. 이 때 가로축은 距離 r 을 나타내고 세로축은 應力値를 나타낸다. 이들은 各各 剪斷力, 굽힘모우멘트, 剪斷力과 굽힘모우멘트가 同時에 作用할 때의 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 方向의 應力分布圖이다.

0° 方向은 荷重狀態에 無關하게 σ_r, σ_θ 가 零이며 $\tau_{r\theta}$ 만이 急激히 커져서 圓孔 半徑의 약 1.7배 지점에서 最大値를 가진 後 거의 一定値를 갖게 되고 σ_e^* 의 값은 $\tau_{r\theta}$ 값의 $\sqrt{3}$ 배이다. 剪斷力만이 作用할 때 45° 方向의 應力分布를 보면 σ_θ 는 圓孔 半徑의 약 2배 되는 지점 內에서 $\tau_{r\theta}, \sigma_r$ 에 비하여 확연히 큰 比重을 차지하고 變化가 急激함을 알 수 있으며 σ_θ 의 絶對值가 σ_r 와 거의 비슷함을 알 수 있다. 또한 굽힘모우멘트만 作用할 때에는 豫想대로 圓孔周圍에서 應力의 變化가 크지 않으나 剪斷力만 作用할 때에는 圓孔周圍에서 심한 應力의 變化가 있음을 볼 수 있다. 이는 純粹 굽힘 狀態에서

Table. 1. Dimensions and mechanical properties of specimen

Item	Symbol	Values	Unit
I-shape steel		100×80×9×12.5	mm
Young's modulus	E	2.1×10^4	kg/mm ²
Poisson's ratio	ν	0.3	
Hole radius	a	2.5, 5	mm
Moment of inertia of cross-section	I	417×10^4	mm ⁴
Constant determined by cross-sectional shape	β	1.54×10^{-3}	mm ⁻²
Shear coefficient	F	1.04	
Cross-sectional area	A	675	mm ²

는 中立軸(x 軸)에서 垂直應力이 零이며 剪斷力에 의한 剪斷應力의 分布는 中立軸에서 最大라는 事實로도 쉽게 豫想할 수 있다. 90° 方向에서 剪斷力만 作用할 때에는 σ_r, σ_θ 가 零이며 $\tau_{r\theta}$ 만이 나타나고, 굽힘모우멘트만 作用할 때에는 $\tau_{r\theta}$ 가 零이고 σ_r 가 σ_θ 에 의하여 좌우되며 σ_θ 의 값은 中立軸에

* σ_e^* 는 等價應力으로 4章에서 說明함

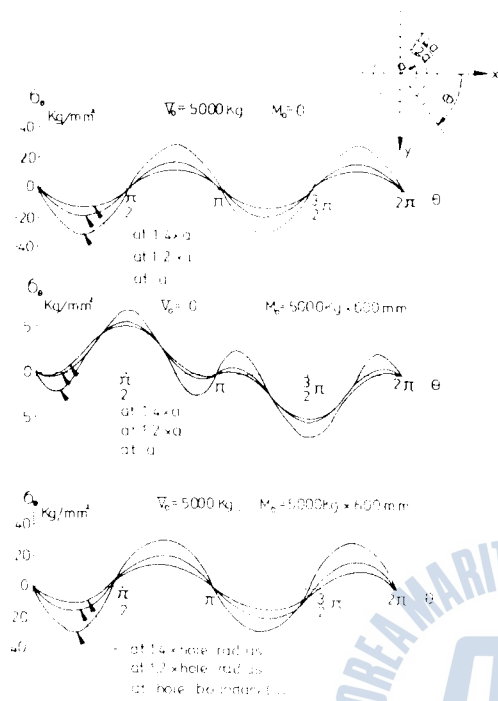


Fig. 3 Distribution of tangential stress σ_θ around the circular hole for the case of hole radius $a=5\text{mm}$

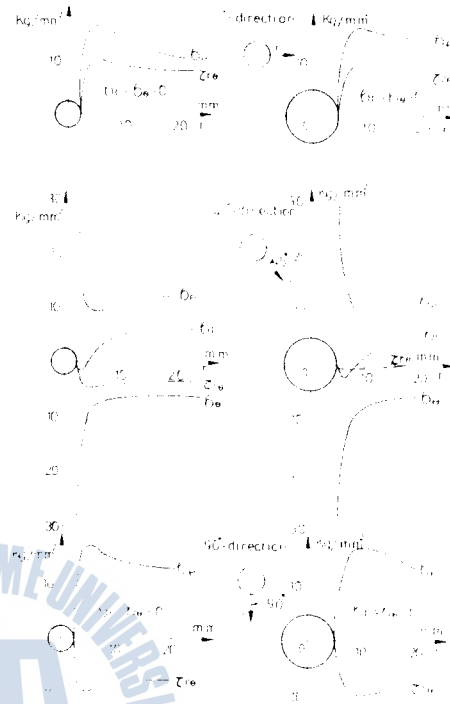


Fig. 4 Distribution of σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, σ_c for the case of shear force 5,000kg

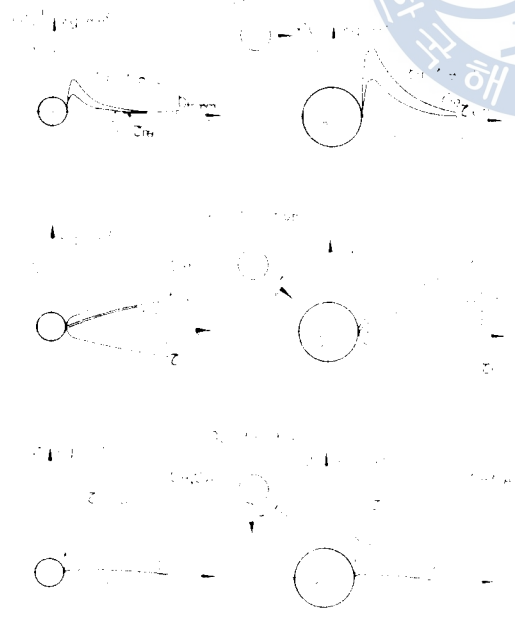


Fig. 5 Distribution of σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, σ_c for the case of bending moment 3,000kg-m

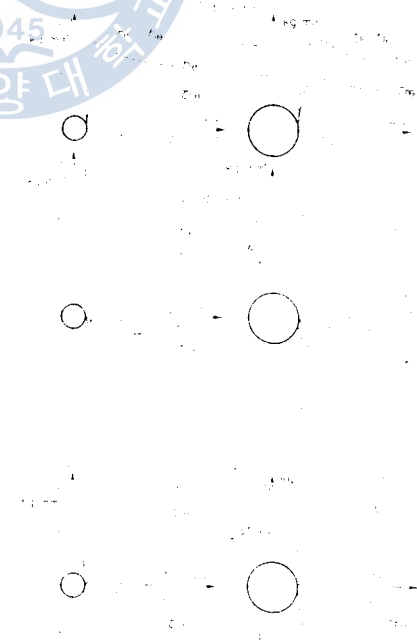


Fig. 6 Distribution of σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, σ_c for the case of shear force 5,000kg and bending moment 3,000kg-m

서 y 방향으로距離가 멀수록 커진다. 따라서 剪斷力과 굽힘모우멘트가 同時에 作用할 때 90° 方向에서 σ_r 는 圓孔 境界에서 零이며 圓孔 半徑의 2배 內에서 急激히 커진 後 서서히 增加함을 알 수 있는데, 이것은 圓孔 半徑 약 2배 內에서는 剪斷力에 의한 $\tau_{r\theta}$ 만이 作用하며 2배 以上에서는 y 方向으로 멀어 질수록 굽힘모우멘트에 의한 σ_θ 의 영향을 받음을 알 수 있다.

4. 塑性域傳播舉動

보에 圓形孔을 設置하면 前述한 바와 같이 圓形孔은 -notch 役割을 하게 되고 荷重의 增加와 더불어 塑性域이 擴大된다. 塑性域이 생기면 이 區域에서 腐蝕이 일어나기 쉽다든지 龜裂源이 될 可能性이 있다든지 등 材料의 強度에 影響을 미치게 되므로 이의 傳播 舉動을 把握할 必要가 있다.

塑性域이 發達하면 이미 線形이 아니기 때문에 앞에서 구한 彈性解는 쓸 수가 없고 엄밀히 구하려면 段階法(step by step method)이나 增分法(incremental method)에 의하여야 한다.^{11,12)} 그러나 notch 周圍와 같이 塑性域이 크지 아니할 때는 彈性解로 부터 구한 應力分布式으로부터 等價應力を 구하고 이 等價應力이 單純引張時의 降伏點 以上인 區域을 塑性域으로 잡는다.¹³⁾

軟性 材料의 境遇 塑性變形判別式은 Von Mises의 式이 가장 잘 맞으므로 이 式을 利用한다.¹³⁾ Von Mises의 判別式은 剪斷變形에너지로서 2次元 平面應力 問題에 있어서 이 式은 다음과 같다.^{14,15)}

$$f(\sigma) = \frac{1}{12G} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2 \} \quad (26)$$

$f(\sigma)$ 의 값이 單純引張時 降伏點에서의 剪斷變形에너지와 같으면 塑性變形이 일어난다고 看做한다. 즉 單純引張時에 降伏點을 σ_0 라 하면 剪斷變形에너지 U_1 은

$$u_1 = \frac{1}{6G} \sigma_0^2 \quad (27)$$

이 되고 이 式을 式(26)과 等置시키면 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2} = \sigma_0 \quad (28)$$

式(28)의 左邊을 等價應力이라 하고 σ_e 로 表示한다.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (29)$$

式(28)을 다시 쓰면 $\sigma_e = \sigma_0$ 가 되므로 塑性變形이 일어나려면 等價應力 σ_e 가 單純引張時의 降伏點 σ_0 에 到達하여야 한다.

한편 式(25)로 表示된 極座標系의 應力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 를 直角座標系의 應力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 로 變換하면 다음과 같다.⁷⁾

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (30)$$

이 式에서 구한 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 를 式(29)에 代入하여 σ_e 를 구할 수 있으며 σ_e 가 σ_0 보다 크거나 같은 領域($\sigma_e \geq \sigma_0$)은 塑性領域이 된다.

Fig. 7은 圓孔 半徑이 2.5mm인 경우 剪斷力만이 作用할 때 σ_e 의 等高線圖로서 圓孔境界 45° 지점에서 最大값을 가진다. Fig. 8~11은 圓孔 半徑이 2.5mm인 경우 剪斷力を 增加시켰을 때의 塑性域 發達舉動을 圖示한 것이며, Fig. 12는 圓孔 半徑이 5mm인 경우 剪斷力만이 作用할 때의 σ_e 의 等高線圖이고 Fig. 13~16은 圓孔 半徑이 5mm인 경우 剪斷力を 增加시켰을 때의 塑性域 發達舉動을 圖示한 것이다. Fig. 8~11과 Fig. 13~16에서 알 수 있는 바와 같이 剪斷力만이 作用할 때 塑性域은 45°, 135°, 225°, 315° 方向 圓孔 가장자리에서 最初로 發生하여 圓孔 半徑의 약 1.5배 지점까지 1次的으로 擴大된다. 荷重을 더욱 增加시켜도 이部分의 塑性域은 거의 變化가 없고 X軸, Y軸上에 圓孔 半徑의 약 1.7배 지점을 起點으로하여 새로운 塑性域이 發生하여 傳播擴大된다.

Fig. 17은 圓孔 半徑이 5mm인 경우 剪斷력과 굽힘모우멘트가 同時에 作用할 때 σ_e 의 等高線圖로서 剪斷力만이 作用할 때와는 달리 y軸 方向이 原點에서 멀수록 σ_e 의 값이 커지며 左右로 넓게 분

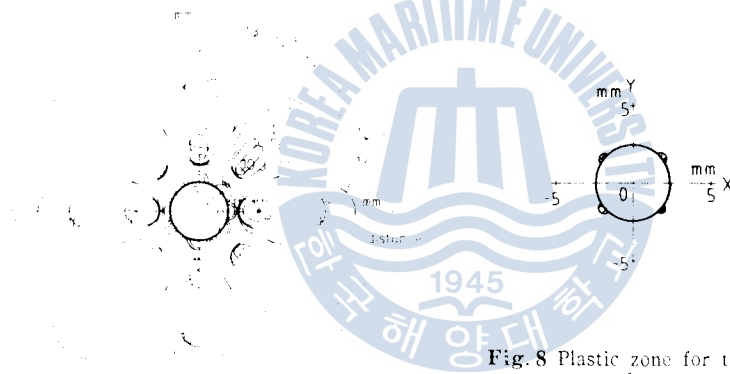


Fig. 7 Contour lines of equivalent stress σ_e (Unit: kg/mm^2) for the case of hole radius $a=2.5\text{mm}$ and shear force $V_0=5.000\text{kg}$

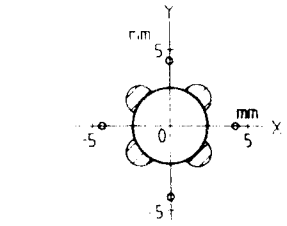


Fig. 9 Plastic zone for the case of $a=2.5\text{mm}$ and $V_0=7.500\text{kg}$

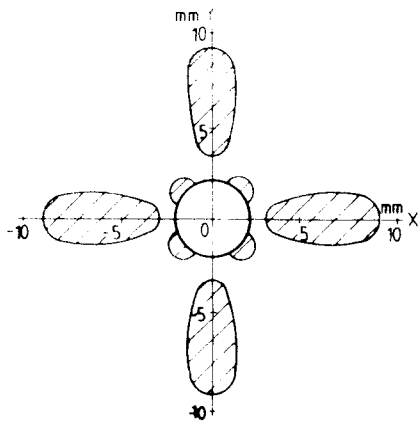


Fig. 10 Plastic zone for the case of $a=2.5\text{mm}$ and $V_0=8.750\text{kg}$

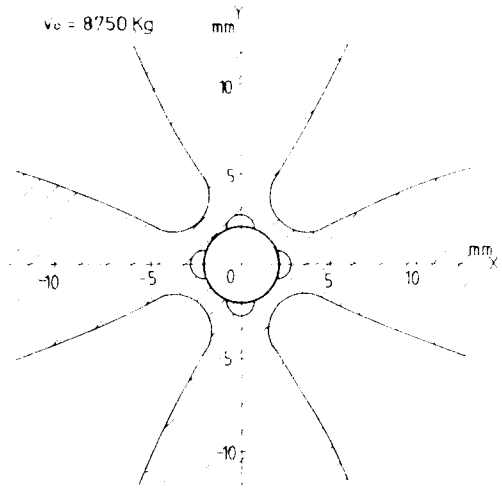


Fig. 11 Plastic zone for the case of $a=2.5\text{mm}$ and $V_0=10.000\text{kg}$

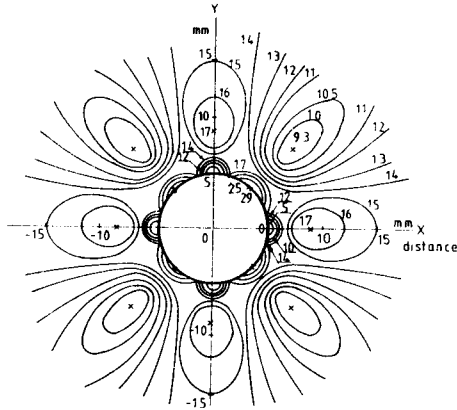


Fig. 12 Contour lines of equivalent stress σ_e (Unit: kg/mm^2) for the case of hole radius $a=5$ mm and shear force $V_0=5,000\text{kg}$

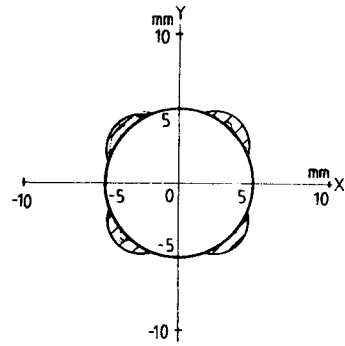


Fig. 13 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$ and $V_0=5,000\text{kg}$

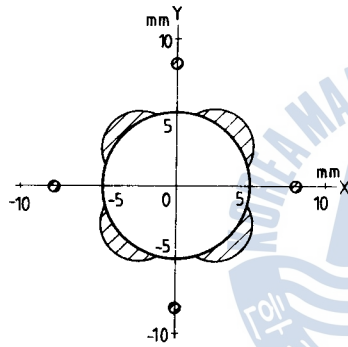


Fig. 14 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$ and $V_0=7,500\text{kg}$

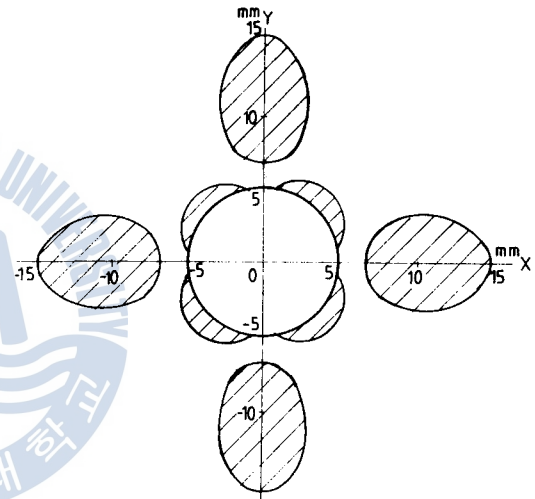


Fig. 15 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$ and $V_0=8,750\text{kg}$

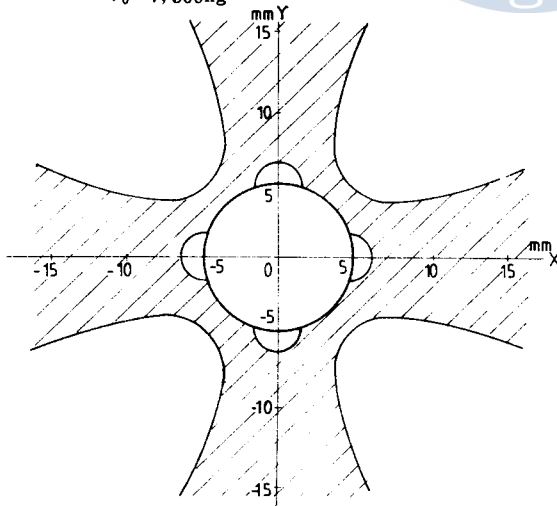


Fig. 16 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$ and $V_0=10,000\text{kg}$

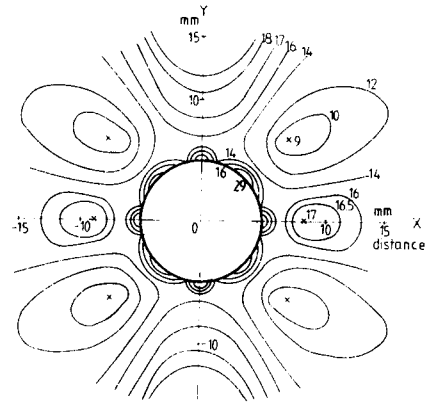


Fig. 17 Contour lines of equivalent stress σ_e (Unit: kg/mm^2) for the case of hole radius $a=5\text{mm}$, shear force $V_0=5,000\text{kg}$ and bending moment $M_0=3,000\text{kg}\cdot\text{m}$

分布을 알 수 있다. Fig. 18~21은 剪斷力은 一定하게 두고 굽힘모우멘트를 增加하였을 때의 塑性域 發達舉動을 圖示한 것으로, Fig. 18의 塑性域은 剪斷力에 의한 것이며 굽힘모우멘트는 거의 영향을 미치지 못하였다. 굽힘모우멘트를 더욱 增加시켜도 그 영역은 거의 擴大되지 않고 原點에서 y 方向으로 먼지점에서부터 새로운 塑性域이 發生하여 圓孔 周으로 進展하고 剪斷力만 作用한 때와 比較하여 y 軸을 基準으로 左右로 넓게 傳播함을 알 수 있다.

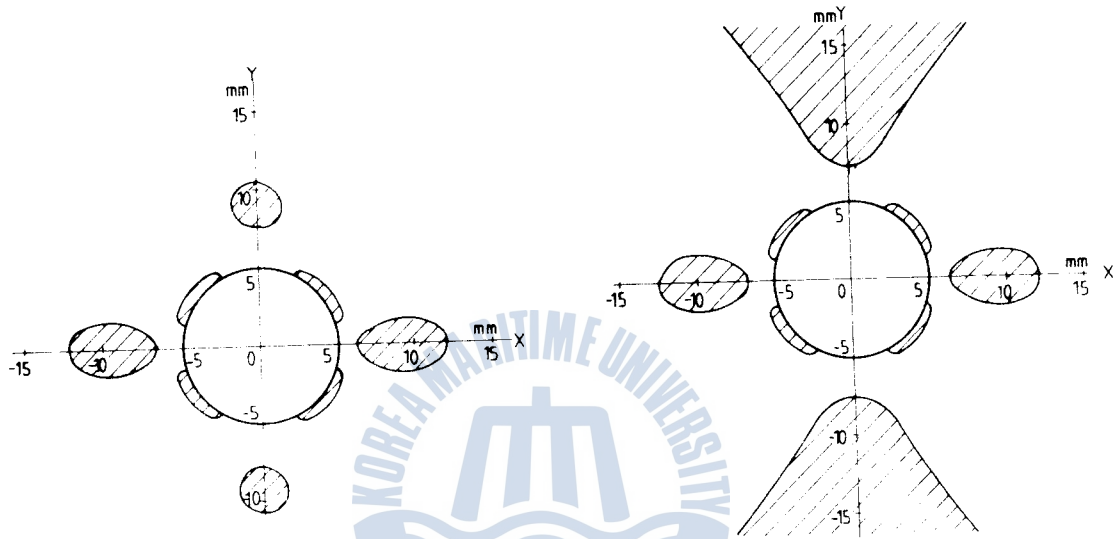


Fig. 18. Plastic zone for case of $a=5\text{mm}$, $V_0=7,500\text{kg}$ and $M_0=2,000\text{kg}\cdot\text{m}$

Fig. 19 Plastic zone for case of $a=5\text{mm}$, $V_0=7,500\text{kg}$ and $M_0=4,000\text{kg}$

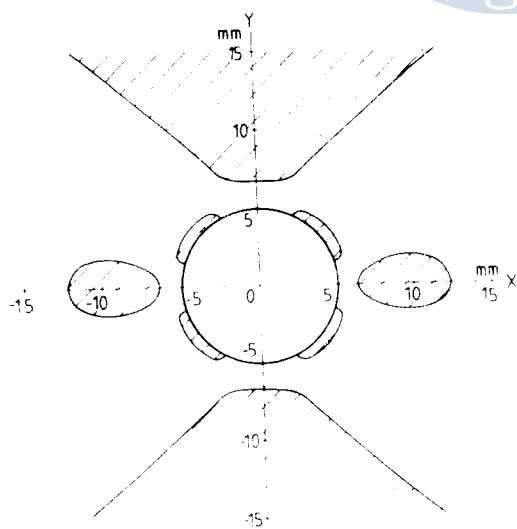


Fig. 20 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$, $V_0=7,500\text{kg}$ and $M_0=6,000\text{kg}\cdot\text{m}$

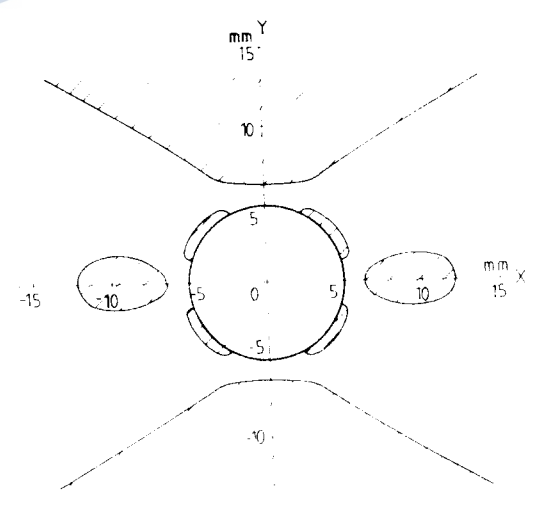


Fig. 21 Plastic zone for the case of $a=5\text{mm}$, $V_0=7,500\text{kg}$ and $M_0=8,000\text{kg}$

5. 實 驗

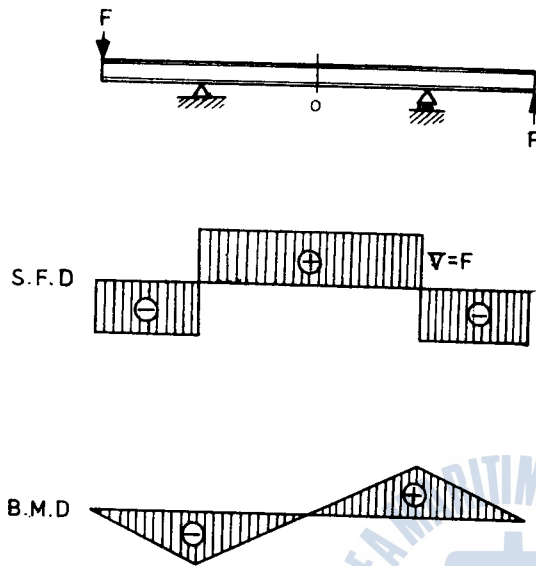


Fig. 22 Experimental Beam

I形鋼을 利用하여 中立軸에 圓形孔을 가진 보를 Fig. 22와 같이 製作하였는데 圓形孔의 中心이 中立軸에 오도록 하였다. 이 보의 剪斷力線圖와 굽힘모우멘트線圖에서 보는 바와 같이 斷面의 位置를 適當히 選定하므로써 一定한 剪斷力에 원하는 굽힘모우멘트를 얻을 수 있어 孔의 位置를 變更시키면 여러가지 경우의 實驗을 할 수 있다.

荷重은 本 實驗室에서 製作한 引張機로 가하였으며 Fig. 23에 圖示하였다. 試驗機의 핸들을 돌리면 한쌍의 워엄 및 워엄기어를 통하여 두개의 암나사에 傳達된다. 두개의 암나사가 돌아가면 이와 맞물린 두개의 리드스큐류를 당겨주며 척과 레버를 통하여 試片에 荷重을 가하게 된

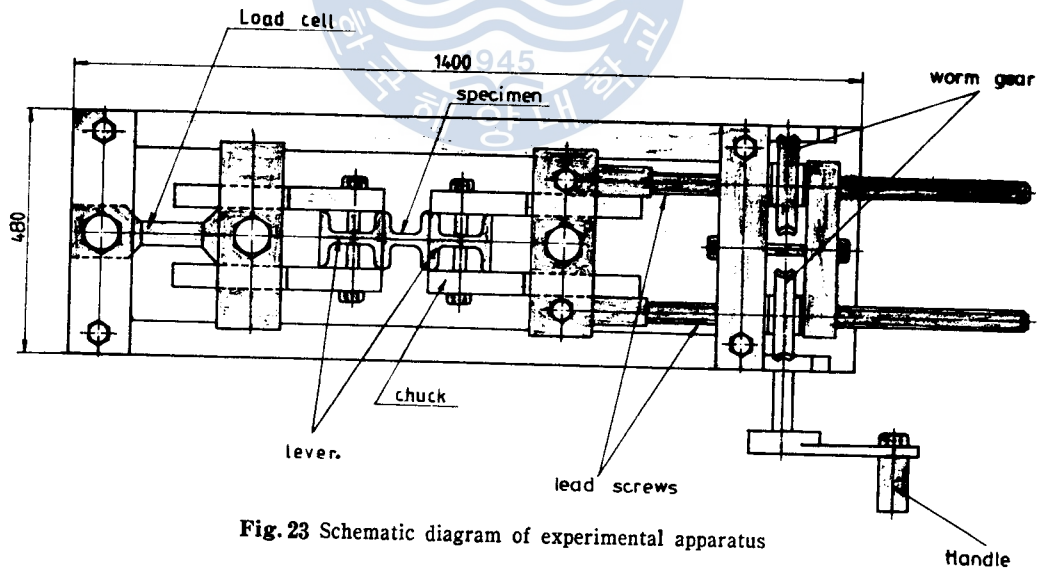


Fig. 23 Schematic diagram of experimental apparatus

다. 荷重의 測定은 圓形斷面棒의 表面에 스트레인게이지를 붙여 測定하였다.

Fig. 24는 試片의 길이와 圓形孔의 位置를 圖示한 것이다. 레버를 引張機에 固定시키고 引張을 가하면 試片이 Fig. 24와 같은 보가 되고 가한 引張力이 보에 作用하는 剪斷力이 된다. 圓形孔 周圍에

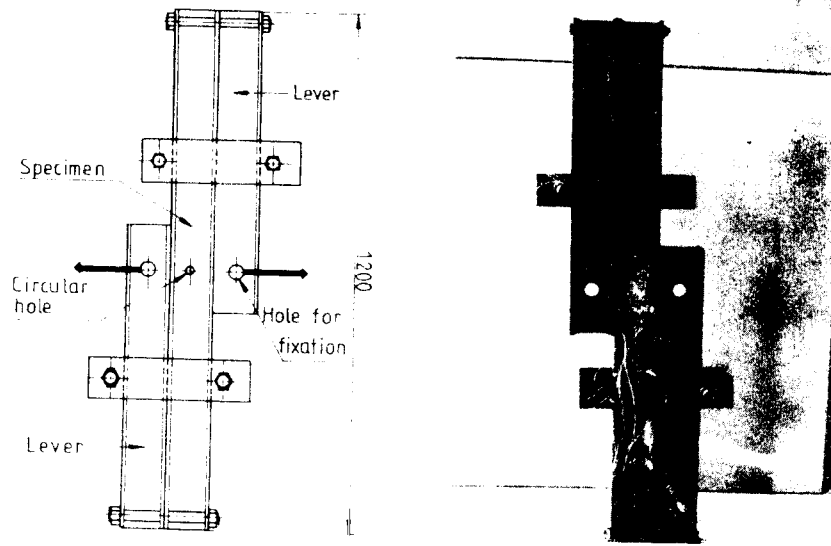


Fig. 24 Configuration of assembled specimen with I shape steel (I-100×80×9×12.5mm)

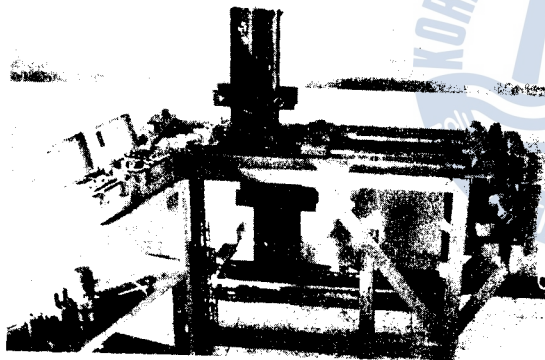


Fig. 25 Schematic Photograph of experimental apparatus assembled specimen and strain meter

스트레인게이지를 일정한 인장력을 증가시키면서
各點의 스트레인을檢出하였다.

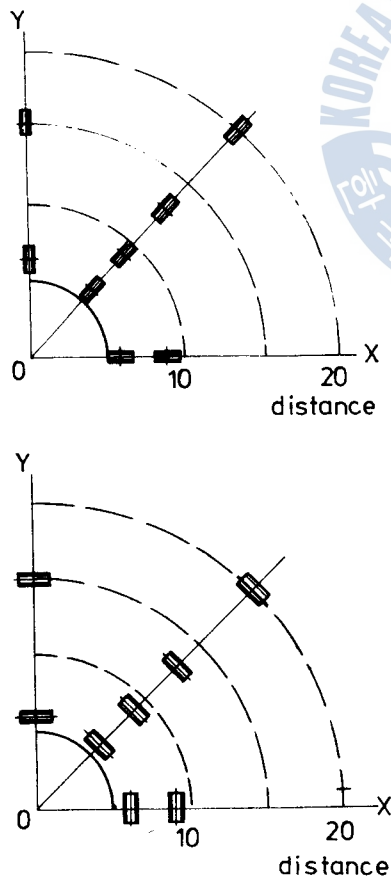
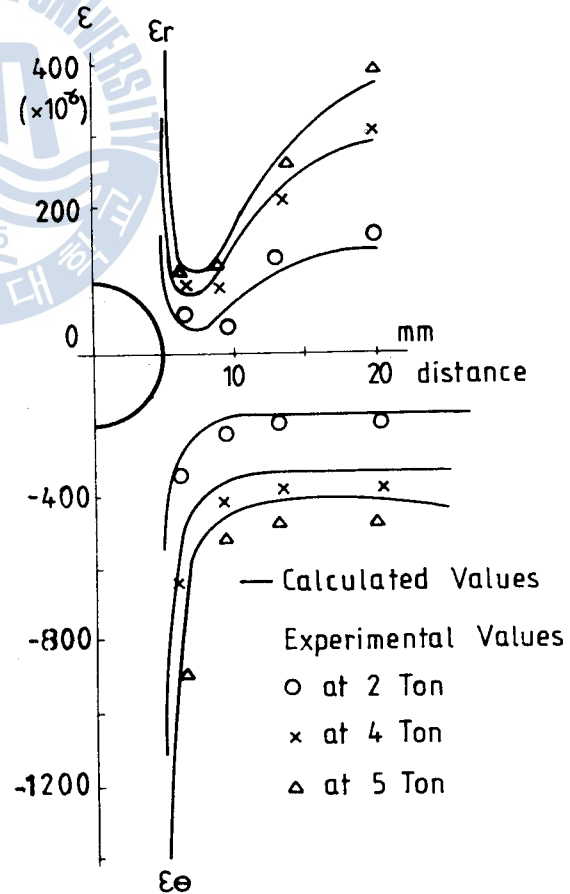
스트레인게이지는 SAN-EI社 製品 Type N11-F
A-2-120-11을 使用하였고 Digital Strain Meter
(Measurements Group, Inc Model p-3500)와 Sw-
itch and Balance Unit (Model SB-10)로 同時
의 10개 各點을 測定할 수 있었다.

Fig. 25는 고에 荷重을 作用하여 任意 各點의 ϵ_x ,
 ϵ_y 를 測定하기 위하여 試驗機에 Fig. 24의 같이 組
立한 試驗片을 裝置하고 Switch and Balance Unit
와 Digital Strain Meter를 連結한 試驗裝置이다.

測定하려고 하는 任意의 點에 Fig. 26과 같이 스트레인게이지를 附着한 試片을 試驗機에 裝置하
고 剪斷力 만을 作用시켰을 때의 ϵ_x , ϵ_y 를 測定하여 實驗値로 하고, 計算値는 式 (5)에 의거하여
Table. 2를 作成하였다. Fig. 27은 45°方向의 境遇 圓孔中心에서의 距離에 따라 變化하는 ϵ_x , ϵ_y 의
分布圖이다. 가로 축은 原點으로부터의 距離 세로축은 스트레인값이며, 그림의 實線은 計算結果를
나타내고 O, A, X는 各各 2^{ton}, 4^{ton}, 5^{ton}의 荷重이 作用할 때의 測定스트레인을 表示한다. 理論値
와 實驗値가 比較的 一致함을 알 수 있다.

Table 2. Values of radial strains and tangential strains (ϵ_r , ϵ_θ) in loading shear force

Directions			90°		45°				0°	
Strains	Loads(kg)	Distance (mm)	6	15	6	9	13	20	6	9
ϵ_θ ($\mu\epsilon$)	2,000	Calculated	1.5×10^{-5}	7.7×10^{-6}	-327	-181	-167	-168	0	0
		Experimental	-8	-9	-331	-217	-203	-202	-67	-77
	3,000	Calculated	2.3×10^{-5}	1.1×10^{-5}	-490	-270	-250	-252	0	0
		Experimental	-9	-13	-478	-310	-292	-290	-118	-103
	4,000	Calculated	3.1×10^{-5}	1.5×10^{-5}	-654	-361	-333	-337	0	0
		Experimental	-8	-15	-644	-414	-390	-387	-142	-132
	5,000	Calculated	3.8×10^{-5}	1.9×10^{-5}	-818	-452	-416	-421	0	0
		Experimental	-5	-19	-814	-516	-485	-484	-167	-159
ϵ_r ($\mu\epsilon$)	2,000	Calculated	-2.6×10^{-6}	-5.7×10^{-6}	56	61	110	147	0	0
		Experimental	-8	-59	57	45	112	163	9	10
	3,000	Calculated	-3.9×10^{-6}	-8.6×10^{-6}	84	91	165	220	0	0
		Experimental	-11	-72	80	66	163	238	10	11
	4,000	Calculated	-5.2×10^{-6}	-1.1×10^{-5}	112	121	220	295	0	0
		Experimental	-14	-79	102	88	218	310	8	14
	5,000	Calculated	-6.5×10^{-6}	-1.4×10^{-5}	140	152	276	368	0	0
		Experimental	-15	-81	123	109	267	377	7	16

Fig. 26 Arrangement of strain gages for measuring ϵ_r and ϵ_θ Fig. 27 Radial and tangential strains (ϵ_r , ϵ_θ) for 45°-direction under shear force

6. 結 論

極座標와 級數形 一般應力函數를 利用하여 圓形孔을 가진 보의 應力解를 求하고, 圓形孔 周圍의 應力分布式을 求하여 圖示하였으며 Von Mises의 塑性變形判別式에 의하여 塑性域傳播舉動을 判定한 後 實驗을 통하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 彎힘모멘트가 M_0 이고 剪斷力이 V_0 일 때 圓形孔 周圍의 應力分布는 極座標로 表示하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \sin \theta + \frac{M_0}{4I} \left(r + \frac{4a^6}{r^5} - \frac{5a^4}{r^3} \right) \sin 3\theta \\ &+ V_0 \left(\beta + \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} - \frac{4\beta a^2 + \alpha a^4}{r^2} \right) \sin 2\theta + \frac{V_0}{4I} \left(r^2 + \frac{5a^8}{r^6} - \frac{6a^6}{r^4} \right) \sin 4\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{M_0}{4I} \left(3r + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin \theta - \frac{M_0}{4I} \left(r + \frac{4a^6}{r^5} - \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 3\theta \\ &- V_0 \left(\beta + \alpha r^2 + \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} \right) \sin 2\theta - \frac{V_0}{4I} \left(r^2 + \frac{5a^8}{r^6} - \frac{2a^6}{r^4} \right) \sin 4\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos \theta + \frac{M_0}{4I} \left(r - \frac{4a^6}{r^5} + \frac{3a^4}{r^3} \right) \cos 3\theta \\ &+ V_0 \left(\beta + \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{3\beta a^4 + \alpha a^6}{r^4} + \frac{4\beta a^2 + \alpha a^4}{2r^2} \right) \cos 2\theta \\ &+ \frac{V_0}{4I} \left(r^2 - \frac{5a^8}{r^6} + \frac{4a^6}{r^4} \right) \cos 4\theta \end{aligned}$$

(2) 圓孔周圍의 應力分布를 보면 剪斷力만 作用할 境遇 45° 方向 圓孔 半徑의 약 2배 內에서 σ_r 과 σ_θ 의 가장 큰 變遷을 보며, $0^\circ, 90^\circ$ 方向은 σ_r 과 σ_θ 가 零이므로 $\tau_{r\theta}$ 의 最大의 σ_r 이 決定되는데 圓孔 半徑의 약 1.7배 位置에서 σ_r 가 最大值가 되고 圓孔으로부터 멀어질수록 應力은 漸次減小하여 2배 位置 以後에는 거의 一定值를 가진다.

(3) 剪斷力만 作用할 때 最初의 塑性域은 45° 方向 圓孔 가장자리에서 發生하여 圓孔 半徑의 약 1.5배 되는 곳까지 擴大한 後 荷重을 增加시켜도 이 位置를 거의 變化가 없고, 새로운 塑性域은 $0^\circ, 90^\circ$ 方向에서 圓孔 半徑의 약 1.7배 位置를 起點으로 發生하여 傳播 擴大함을 알 수 있다.

(4) 彎힘모멘트와 剪斷力이 同時에 作用할 때에는 두 힘의 相對的인 크기에 따라 塑性域 傳播 舉動이 左右된다. 剪斷力을 一定하게 하고 彎힘모멘트만 增加시켰을 때 剪斷力에 의한 塑性域을 거의 變化가 없고 原點에서 y方向으로 가장 먼저 접해서부터 새로운 塑性域이 發生하여 圓孔 쪽으로 進展한다. 剪斷力만 作用할 때와 比較하여 y軸을 基準으로 左右로 넓게 傳播함을 알 수 있다.

(5) 剪斷力만 作用하는 경우에 原點으로부터 距離에 따라 變化하는 ϵ_x, ϵ_y 의 計算值와 實驗值가 比較的 一致하였다.

參 考 文 獻

- 1) 西田正孝, “應力集中”, 森北出版株式會社, p224~227, 1967.
- 2) 前掲書 (1), p. 253~257.
- 3) A. P. Green, “The Plastic Yielding of Notched Bars Due to Bending”, Q. J. Mech. appl. Maths. 6, p223, 1953.
- 4) E.H. Brown, “Plastic Asymmetrical Bending of Beams”, Int. J. mech. sci. 9, p77, 1937.
- 5) R.T Shield, “On the Plastic Flow of Metals under Conditions of Axial Symmetry”, Proc. R. Soc. A. 233, p 267, 1955.
- 6) S.P. Timoshenko and D.H. Young, “Elements of Strength of materials”, D. Van Nostrand Co, p95~133, 1968.
- 7) S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, “Theory of Elasticity”, Mcgrawhill International Book Co, p182~141, 1970.
- 8) 廉永夏外 共譯, “固體力學의 基礎와 應用”, 東明社, p131~147, 1980.
- 9) S.T. Rolfe and J.M. Barsom, “Fracture and Fatigue control in Structures”, Prentice-Hall Inc, 1977.
- 10) David Broek, “Elementary Engineering Fracture Mechanics”, Sigthoff & Noordhoff, 1978.
- 11) 山田嘉昭, “塑性, 粘彈性”, 培風館, p59~83, 1970.
- 12) W. Johnson and P.B. Meller, “Engineering Plasticity”, Van Nostrand Reinhold Co, p12~15, 1975.
- 13) Alexander Mendelson, “Plasticity, Theory and Application”, The Macmillan Press, p70~97, 1970.
- 14) R. A. Slaster, “Engineering Plasticity”, The Macmillan Press, p111, 1977.
- 15) R. Hill, “The Mathematical Theory of Plasticity”, Oxford, p15~23, 1960.
- 16) J.W. Dally and W.F. Riley, “Experimental stress analysis”, Mcgraw-Hill International Book Co., p366~420, 1965.

