定期船에 있어서 最大收益을 爲한 高·低運賃貨物量의 決定에 關한 研究

金 一 文

A Study on the Decision of High versus Low Paying Cargo for Maximum Revenue in Liner Ship

I. M. Kim

目 次

Abstract

A liner ship has its own freight rates on cargoes carried in the trade. This study is on the optimum combination of high and low paying cargoes to deduce the maximum freight revenue in various freight rates at the comparison of low paying freight rate with high paying freight rate in a liner trade.

The solution is under the assumption that the probabilities of being booked of high paying cargoes are either a uniform distribution or a normal distribution.

A numerical solution is also used for deriving out the maximum freight revenue which will not have a general solution, and also a numerical method is applied for the further-practical results of the clearer relations between high and low freight rates.

From the result, we can expect a higher revenue by appropriate combination of high and low freight cargoes according to their freight rates comparison.

1. 序 論

貨物의 海上運送은 그 運送期間이 길고 運送途中 貨物을 善良하게 管理하여야 하는 特性 때문에

海上運賃은 貨物의 種類에 따라 差別運賃率(Discriminatory Rates)을 適用하고 있다.

定期船 運航에 있어서 그 航路上 이미 定하여진 各寄港地는 定期船의 一定한 Space를 割當받아 그 範圍内에서 貨物을 Booking하게 된다.

高運賃貨物과 低運賃貨物은 一般的으로 같은 船艙容積을 차지하면서 運賃에 差가 있으므로 自然히 低運賃貨物은 船舶會社가 그의 運送을 爲하여 競爭을 적게 하게 되고, 따라서 低運賃貨物을 船積할 수 있는 機會와 量도 比較的 많다.

그러므로 低運賃貨物에 對하여는 船舶會社側은 船舶의 出港時間에 緊迫하게 豫約할 必要없이 餘裕을 가지고 船積을受諾할 수 있게 된다.

高運賃貨物은 收益이 높아서 船舶會社가 서로 船積할려는 競爭이 많은 貨物이므로 貨物이 貴하고 出航直前이라도 貨物만 있으면 Booking하여 船積하고싶은 貨物이기 때문에 船舶會社는 豫想되는 高運賃貨物量에 對한 Space를 남겨 놓고 船積을 許容할 수 있는 最後의 時間까지 貨主에게 船積을 勸誘해야 할 貨物이다.

그러므로 期待되는 高運賃貨物量을 合理的이고도 適切하게 定하여 나머지의 Space에 對하여서는 低運賃貨物을 Booking해 두고 高運賃貨物量을 期待量과 같게 되도록 船積努力을 하는 것이 一般的이다.

따라서 먼저 船積手續을 取하게 되는 低運賃貨物量은 곧 高運賃貨物量을 決定하는 要因이 되고, 運賃額의 決定要因도 된다.

本 論文은 高運賃貨物量의 運送期待를 確率的으로 取扱하여 高·低運賃貨物을 그의 運賃比率에 따라 最適貨物量을 決定하므로써 船舶會社가 最大收益을 얻는 方法을 研究한다.

2. 最適貨物量의 決定

本 問題를 接近하는 方法에는 期待收益을 最大로하는 着想과 期待損失을 最少로 하는 着想이 있다. 本 論文에서는 期待收益을 最大로하는 方法으로 研究한다.

여기에서 高運賃貨物量과 低運賃貨物量을 最適切히 豫約하여 船舶會社의 最大收益을 導出하는 理論을 展開하기 爲하여 다음과 같은 假定을 設定한다.

i) 貨物의 種類를 高運賃貨物과 低運賃貨物의 二種만으로 限定한다.

ii) 寄港地에 配當된 Space를 그 港에서 期待되는 高運賃貨物의 最大量과 같다고 假定한다.

iii) 最近 Container貨物의 平均積貨係數는 70에서 100程度이므로 船積되는 모든 貨物을 容積貨物 (Measurement cargo)로 假定하다.

iv) 첫번째 決定하는 低運賃貨物은 단 한번만 決定하고 解約하지 못하는 것으로 한다.

記號說明

A: 高運賃貨物의 最大期待量(cu·ft), 配當船艙 容積

y: 高運賃貨物量(cu·ft)

x: 船積受諾된 低運賃貨物量

p: cu·ft당 달라로 表示한 低運賃貨物의 純收益

q: cu·ft당 달라로 表示한 高運賃貨物의 純收益

$E(R)$: 期待收益(Expected revenue)

$E(L)$: 期待損失(Expected loss)

$$E(R)=px+q\int_0^{A-x} y\cdot f(y)dy+q\int_{A-x}^{A}(A-x)f(y)dy \quad \cdots\cdots (2-1)$$

한 寄港地에 配當된 space를 A라고 하고 당해航海에서 運送이 豫想되는 高運賃貨物量을 $(A-x)$라고 했을 때 低運賃貨物을 x만큼 豫約하게 되면, 그 運賃收益은 $p\cdot x$가 된다.

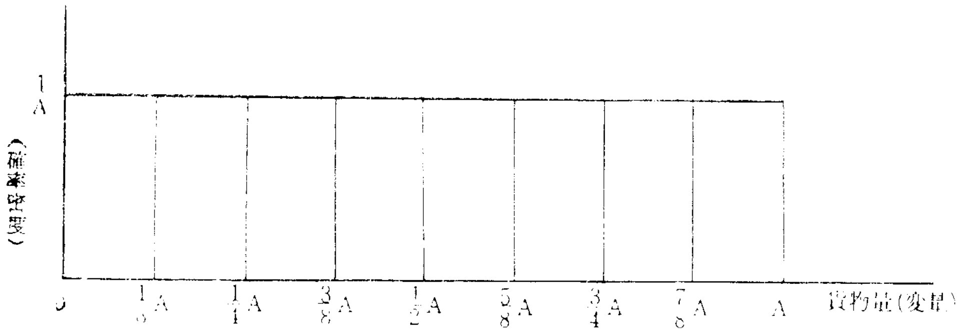
高運賃貨物量 y를 豫約할 수 있는 確率密度를 $f(y)$라하면 $\int yf(y)dy$는 高運賃貨物을 y만큼 豫約할 수 있는 期待値가 되므로 高運賃貨物을 $0\sim(A-x)$까지 豫約할 수 있는 期待値는 $\int_0^{A-x} y\cdot f(y)dy$가 되며, 여기에 單位收益 q를 곱한 $q\int_0^{A-x} y\cdot f(y)dy$는 高運賃貨物을 $0\sim(A-x)$만큼 豫約할수 있는 期待收益이 된다. 또 高運賃貨物量$(A-x)$를 모두 豫約할 수 있는 確率密度를 $f(y)$라 하면, 高運賃貨物을 $(A-x)$만큼 船積할 수 있는 確率은 $\int_{A-x}^{A} f(y)dy$이고, 그 期待値는 $\int_{A-x}^{A}(A-x)f(y)dy$가 된다. 따라서 高運賃貨物을 $(A-x)$만큼 船積할 수 있는 期待收益은 $q\int_{A-x}^{A}(A-x)f(y)dy$이다.

위의 $q\int_0^{A-x} y\cdot f(y)dy$와 $q\int_{A-x}^{A}(A-x)\cdot f(y)dy$는 서로 背反이므로 (2-1)式과 같다.

여기에서 만약 低運賃貨物量(x)을 많이 運送受諾하였다면 高運賃貨物을 船積할 수 있는 船艙容積은 모자라게 되고 反對로 低運賃貨物을 적게 運送受諾하였다면 高運賃貨物量이 船艙餘積을 채울 수 없어 船艙을 가득 채우지 못하고 運航하므로 期待收益은 마찬가지로 줄어들게 된다.

그러므로 高運賃貨物의 船積量이 低運賃貨物을 船積하고 남은 餘積과 가장 適切하게 맞도록 定하는 것은 運賃收益에 重大한 영향을 미치게 된다. 따라서 豫約可能한 高運賃貨物量의 確率을 市場의 여건에 適合하도록 定한다는 것은 大端히 重要하다. 여기서는 均等分布라고 假定하였을 때와 正規分布로 假定하였을 때로 나누어 생각해 본다.

2.1 船積을 期待할 수 있는 高運賃貨物量의 確率分布를 均等分布로 假定하였을 때



(그림1) 航海當 貨物의 船積期待가 均等分布

(그림1)의 均等分布에 있어서

y; $0\sim A$일때 $f(y)=\frac{1}{A}$

y; 그외의 경우 ($y<0$, $y>A$)일 때 $f(y)=0$이므로

(2-1)式에 代入하면

$$E(R)=px+q\int_0^{A-x} y\cdot\frac{1}{A}dy+q\int_{A-x}^{A}(A-x)\frac{1}{A}dy$$

$$=px+\frac{q}{A}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{A-x}+\frac{q}{A}(A-x)\left[y\right]_{A-x}^{A}$$

$$=px+\frac{q}{A}\left[\frac{(A-x)^2}{2}+Ax-x^2\right]$$

$$=px+\frac{q\cdot A}{2}\left[1-\frac{x^2}{A^2}\right] \quad\cdots\cdots(2-2)$$

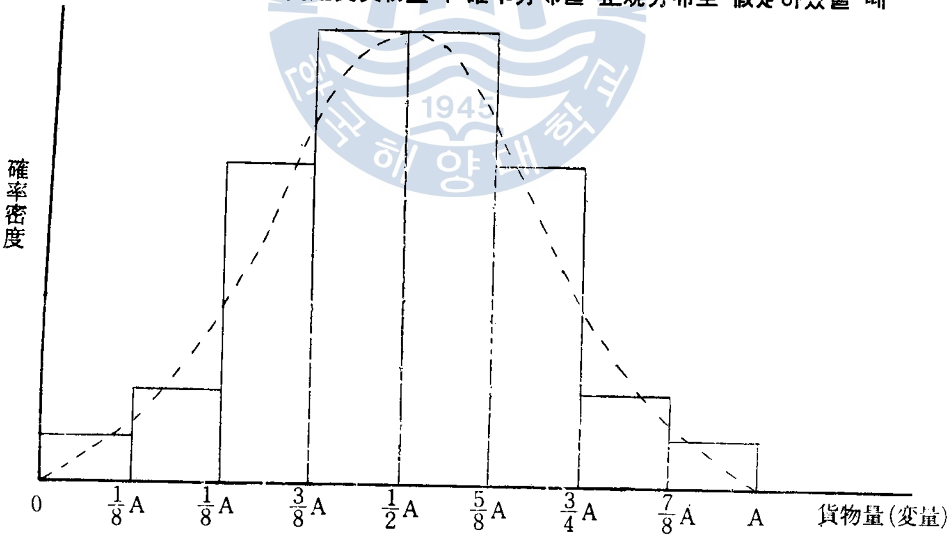
期待收益의 最大値를 求하여 보면

$$\frac{dE(R)}{dx}=p-\frac{q\cdot A}{2}\cdot\frac{2x}{A^2}=p-\frac{qx}{A}=0,\quad x=\frac{p}{q}A$$

$$\frac{d^2E(R)}{dx^2}=-\frac{q}{A}<0$$ 이므로 最大値가 存在한다.

$\therefore x=\frac{pA}{q}$에서 maximum(最大値)

2.2 船積을 期待할 수 있는 高運賃貨物量의 確率分布를 正規分布로 假定하였을 때



(그림 2) 航海當 貨物의 船積期待가 正規分布

2.1에서 高運賃貨物의 船積受諾確率을 均等한 것으로 假定하였다.

定期船運航에 있어서 한 船舶의 어떤 單一航海에서 高運賃貨物을 船積할 수 있는 確率은 一般的으로 最大期待量의 半程度가 가장 높고, 전혀 싣지 못하거나 最大貨物量을 船積할 수 있는 경우는 낮다. 따라서 高運賃貨物의 船積受諾確率을 均等分布로 보는 것보다 正規分布로 보는 것이 一般的이다.

正規分布의 確率密度函數는 다음과 같다.

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ 을 (2-1)式에 代入하면

$$E(R)=px+q\int_0^{A-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}y\cdot dy+q(A-x)\int_{A-x}^{A}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2-3)$$

(2-3)式에서 $\frac{y-\mu}{\sigma}=t$라 놓으면

$y=\sigma t+\mu$

$dy=\sigma dt$

$y=0$ 일 때 $t=-\frac{\mu}{\sigma}$

$y=A$ 일 때 $t=\frac{A-\mu}{\sigma}$

$y=A-x$일때 $t=\frac{A-x-\mu}{\sigma}$을 (2-3)式에 代入하면

$$E(R)=px+\frac{q}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}(\sigma t+\mu)\sigma dt+\frac{q(A-x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt$$

$$=px+\frac{q}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}(\sigma t+\mu)dt+\frac{q(A-x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=px+\frac{q\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{q\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{q(A-x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$E(R)=px+\frac{q\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}\right]+\frac{q\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$+\frac{q(A-x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-4)$$

(2-4)式에서 期待收益의 最大値을 求하여 보면

$$\frac{dE(R)}{dx}=p-\frac{q(A-\mu-x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}-\frac{q\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}+\frac{q(A-x)}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\frac{q}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-\mu-x}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=p-\frac{q}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-\mu-x}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$$ 일 때

$$\int_{\frac{A-\mu-x}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{p}{q}\sqrt{2\pi} \qquad \cdots\cdots (2-5)$$

$\dfrac{d^2E(R)}{dx^2} = -\dfrac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}} < 0$이므로 最大値가 存在한다.

最適値($\hat{X}$)는 (2—5)式의 解로서 주어지나 이를 理論的으로 求할 수 없으므로 數値計算으로 할 수밖에 없다.

3. 數値計算例 및 考察

(例1) 均等分布 일 때

(2—2)式의

$$E(R) = px + q\int_0^{A-x} y\frac{1}{A}dy + q\int_{A-x}^{A}(A-x)\frac{1}{A}dy$$

$= px + \dfrac{q\cdot A}{2}\left[1-\dfrac{x^2}{A^2}\right]$에 의하여 一般的인 期待收益을 求하면 表(1)와 같다.

(表1)에서 다음 4가지를 유도했다.

a. 一般的으로 低運賃貨物을 排斥하는 傾向이 있으나, 適當한 量을 船積하는 것이 利롭다.

b. 低運賃貨物의 收益p가 高運賃貨物의 收益 q에 비하여 差가 클때는 最大運賃收益은 減少하고 또 低運賃貨物量 x를 적게 한 때 最大收益点이 있다.

c. 表1의 $p/q=1/4$, $p/q=1/2$, $p/q=3/4$란에서 低運賃貨物量(x)을 最適低運賃貨物量의 50%～150%, 75%～125%, 83%～117%로 變化시켜도 期待收益의 變動은 1.5%, 1.28%, 1.03%의 微少한 變化를 함을 알 수 있다.

d. 最大收益値를 中心으로 低運賃貨物量의 變化에 따른 收益額은 上下對稱이다. 따라서 低運賃貨

表 1 低運賃貨物의 受諾量에 따른 期待收益

低運賃 貨物 受諾量	$\frac{E(R)}{q.A}$			
	$p/q=1/4$	$p/q=1/2$	$p/q=3/4$	$p/q=1$
x = 0	0.500	0.500	0.500	0.500
1/8A	0.523	0.555	0.586	0.617
1/4A	*0.531	0.594	0.651	0.719
3/8A	0.523	0.617	0.711	0.805
1/2A	0.500	*0.625	0.750	0.875
5/8A	0.461	0.617	0.773	0.930
3/4A	0.406	0.594	*0.781	0.969
7/8A	0.336	0.555	0.773	0.992
1/1A	0.250	0.500	0.750	*1,000

(註, 위의 값에 $q.A$를 곱하면 期待收益이 된다)

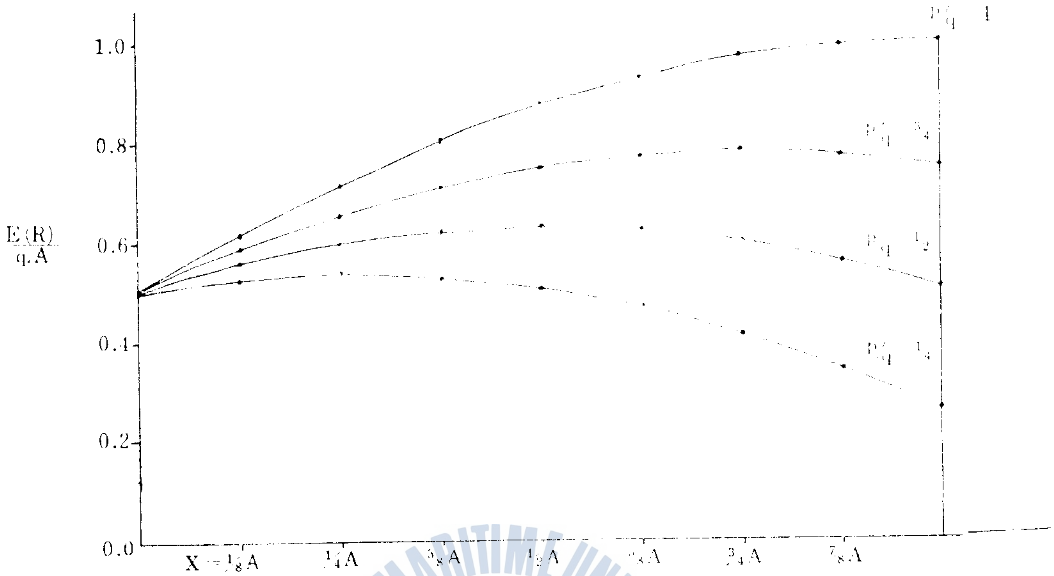


그림 3 低運賃貨物의 受諾量

物量을 最大收益値의 量보다 적게 船積하여 같은 收益을 올리는 것이 많이 船積하여 같은 收益을 올리는 것보다 利로울 것이다.

(**例2**) 正規分布 일 때

平均 $(\mu)=\frac{A}{2}$이고, 標準偏差 (σ)를 $\frac{A}{5}$로 假定하여 (2—4)式의 $\mu\cdot\sigma$에 代入하면 다음과 같다.

$$E(R)=px+q\frac{A}{5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{25}{8}}-e^{-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{A}\right)^2}\right]$$

$$+q\cdot\frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}-\frac{5x}{A}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+q(A-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{5}{2}-\frac{5x}{A}}^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\cdots\cdots\cdots\cdots(3-1)$$

(3—1)式에서 다음과 같이 놓으면

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{25}{8}}-e^{-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{A}\right)^2}\right]$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}-\frac{5x}{A}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{5}{2}-\frac{5x}{A}}^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(I_2, I_3의 **計**算은 正規曲線面積表에 의함)

表 2 I_1. I_2, I_3의 計 算 結 果

	I_1	I_2	I_3
x = 0	0	0.9876	0
1/8A	−0.0512	0.9616	0.0259
1/4A	−0.1651	0.8863	0.1012
3/8A	−0.3106	0.7262	0.2613
1/2A	−0.3814	0.4938	0.4938
5/8A	−0.3106	0.2613	0.7262
3/4A	−0.1651	0.1012	0.8863
7/8A	−0.0512	0.0259	0.9616
A	0	0	0.9876

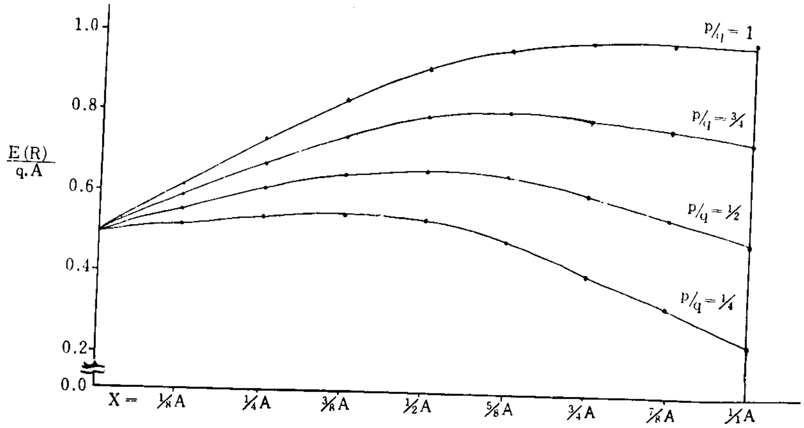
$$E(R)=px+\frac{q\cdot A}{5}I_1+\frac{q\cdot A}{2}I_2+q(A-x)I_3 \quad \cdots\cdots(3-2)$$

$x\cdot p$값을 (3—2)式에 代入하여 $E(R)$을 구하면 (表3)와 같다.

表 3 低運賃貨物의 受諾量에 따른 期待收益

低運賃 貨物 受諾量	$\frac{E(R)}{q.A}$			
	$p/q=1/4$	$p/q=1/2$	$p/q=3/4$	$p/q=1$
x = 0	0.4938	0.4938	0.4938	0.4938
1/8A	0.5245	0.5557	0.5870	0.6182
1/4A	0.5485	0.6110	0.6735	0.7360
3/8A	*0.5581	0.6518	0.7455	0.8393
1/2A	0.5425	*0.6675	0.7925	0.9175
5/8A	0.4971	0.6533	*0.8096	0.9658
3/4A	0.4266	0.6141	0.8016	0.9891
7/8A	0.3416	0.5604	0.7791	0.9979
A	0.25	0.50	0.75	*1.00

(註, 위의 값에 $q.A$를 곱하면 期待收益이 된다)



(그림 4) $E(R)$ $q\cdot A$ 低運賃貨物의 受諾量

(表3)에서 다음 3가지를 유도했다.

a. 高運賃貨物의 船積確率이 均等分布보다 正規分布에 가까울수록 最大期待收益은 높아진다.

b. 高運賃貨物의 船積確率이 均等分布로 假定하였을 때는 p/q(低/高運賃收益)=1/4이면 最大期待收益은 低運賃貨物의 豫約量이 1/14가 되고, $p/q=1/2$이면 1/24가 되고, $p/q=3/4$이면 3/14가 되며 또, 高運賃貨物의 船積確率이 正規分布일 때는 各各 3/84, 1/24, 5/84이 된다.

c. 表3의 $p/q=1/4$, $p/q=1/2$, $p/q=3/4$에서 低運賃貨物量(x)은 最適低運賃貨物量의 67%~133%, 75%~125%, 80%~120%로 變化하므로 運賃期待收益의 變動은 2.8%, 2.4%, 1.2% 以下의 微少한 變化를 하고 있음을 알 수 있다.

4. 結 論

a. 정확한 統計에 의하여 정확한 物動量을 推算할 수 있을 때는 高低運賃貨物量의 適正量에 의해 最大收益을 올릴 수 있다.

b. 一般的으로 實務者는 低運賃貨物을 排斥하고 高運賃貨物만을 船積하려는 傾向이 있으나, 本論文의 結果 低運賃貨物을 適切하게 船積하면 期待收益이 더욱 높아진다는 것을 알 수 있다.

c. 高運賃貨物과 低運賃貨物의 運賃差가 적을 때는 充分한 時間的 餘裕가 있는 低運賃貨物을 미리 豫約하는 것이 利롭다.

d. 運賃의 種類를 3種 4種으로 늘리거나 配當 Space를 高運賃貨物의 期待最大量보다 더 크게 할 때 等에 對하여서는 앞으로 더 研究되어야 한다.

e. 本 論文은 高運賃貨物의 船積確率을 均等分布와 正規分布로 가정하였으나 Poisson 分布에 對하여는 追後 研究할 여지가 있다.

參 考 文 獻

1. ARLEEN O'LOUGHLIN, "The Economic of Sea Transport," Pergamon Press, OXFORD, UK., 1967.
2. 岡庭博, "海運の 經營", 海文堂, 東京, Sep. 1968.
3. 前田禎郎, オペレーションズリサーチ, April, 1977.
4. AMELIO M. D'ARCANGELO, Ship Design and Construction, SNAME, New York, 1975.

附 錄

高運賃貨物의 船積期待를 均等分布 및 正規分布로 했을때의 最少期待損失에 對한 計算

$$E(L)=p\int_0^{A-x}(A-x-y)f(y)dy+(q-p)\int_{A-x}^{A}[y-(A-x)]f(y)dy \cdots\cdots(1)$$

한 寄港地에 配當된 Space를 A라하고 당해 航海에서 運送이 豫想되는 高運賃貨物量을 $(A-x)$라고 했을 때 低運賃貨物을 x만큼 豫約하게 된다.

이때 高運賃貨物量y가 $(A-x)$보다 적게 豫約되므로서 $(A-x-y)$만큼의 低運賃貨物을 船積할 수 없는 結果가 된다.

따라서 $\int_0^{A-x}(A-x-y)f(y)dy$는 低運賃貨物을 $(A-x-y)$만큼 船積할 수 없는 期待値가 된다.

여기에 低運賃貨物을 $(A-x-y)$만큼 船積못함으로써 생기는 期待損失은 $p\int_0^{A-x}(A-x-y)f(y)dy$가 된다.

또 高運賃貨物量(y)이 $(A-x)$보다 많이 豫約되므로서 $[y-(A-x)]$만큼의 高運賃貨物을 船積하지 못하고 代身 低運賃貨物을 船積하게 되는 結果가 된다.

即 高運賃貨物(y)이 $(A-x)$보다 $[y-(A-x)]$만큼 더 커서 發生하는 期待損失値는 $\int_{A-x}^{A}[y-(A-x)]f(y)dy$가 되고 그 期待損失은$(q-p)\int_{A-x}^{A}[y-(A-x)]f(y)dy$가 된다.

위 $p\int_0^{A-x}(A-x-y)f(y)dy$ 및 $(q-p)\int_{A-x}^{A}[y-(A-x]f(y)dy$는 背反이므로 期待損失은 (1)과 같다.

1. 船積을 期待할 수 있는 高運賃貨物量의 確率分布를 均等分布로 假定하였을 때

$0<y<A$ 일 때 $f(y)=\frac{1}{A}$

$y<0, y>A$ 일 때 $f(y)=0$이다.

여기에서 $f(y)=\frac{1}{A}$을 (1)式에 代入하면

$$E(L)=p\int_0^{A-x}(A-x-y)\frac{1}{A}dy+(q-p)\int_{A-x}^{A}[y-(A-x)]\frac{1}{A}dy$$

$$=\frac{1}{A}p\left[Ay-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{A-x}+\frac{q-p}{A}\left[\frac{y^2}{2}-(A-x)y\right]_{A-x}^{A}$$

$$=\frac{qx^2}{2A}-p\left(x-\frac{A}{2}\right)$$

期待損失의 最少値를 求하여 보면

$$\frac{dE(L)}{dx}=\frac{q}{A}x-p=0,\quad x=\frac{pA}{q}$$

$$\frac{d^2E(L)}{dx^2}=\frac{q}{A}>0$$

이므로 最少値가 存在한다.

$\therefore \ x=\frac{pA}{q}$ 에서 Minimum(最少値)

表 4 低運賃貨物의 受諾量에 따른 期待損失

低運賃 貨物 受諾量	$\frac{E(L)}{q.A}$			
	$p/q=1/4$	$p/q=1/2$	$p/q=3/4$	$p/q=1$
$x=0$	0.125	0.250	0.375	0.5
$1/8A$	0.01	0.195	0.289	0.382
$1/4A$	*0.093	0.156	0.218	0.281
$3/8A$	0.101	0.132	0.164	0.195
$1/2A$	0.125	*0.125	0.125	0.125
$5/8A$	0.164	0.132	0.101	0.700
$3/4A$	0.218	0.156	*0.93	0.031
$7/8A$	0.289	0.195	0.101	0.007
$1/1A$	0.379	0.250	0.125	*0.000

(註, 위의 값에 $q.A$를 곱하면 期待損失이 된다)

2. 船積을 期待할 수 있는 高運賃貨物의 確率分布를 正規分布로 假定하였을 때

正規分布의 確率密度函數 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 을 (1)式에 代入하면

$$E(L)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^{A-x}p(A-x-y)\,e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy+\int_{A-x}^{A}[y-(A-x)](q-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \qquad \cdots\cdots(2)$$

(2)式에서 $\frac{y-\mu}{\sigma}=t$라 놓으면

$$y=\sigma t+\mu,\quad dy=\sigma dt$$

$$y=0 \text{ 일 때,}\quad t=-\frac{\mu}{\sigma}$$

$$y=A-x \text{ 일 때,}\quad t=\frac{A-x-\mu}{\sigma}$$

$$y=A \text{ 일 때,}\quad t=\frac{A-\mu}{\sigma}$$

$$A-x-y=A-x-\mu-\sigma t$$

$y-(A-x)=\sigma t+\mu-A+x$, 을 (2)式에 代入하면

$$E(L)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[p\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}(A-x-\mu-\sigma t)\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt+(q-p)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}(\sigma t+\mu-A+x)\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\,p(A-\mu-x)\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-p\sigma\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$+(q-p)(\mu-A+x)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+(q-p)\,\sigma\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式에서

$$\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\Big[\,e-{}^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}=e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x}{\sigma}} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}=e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(A-u)^2}{2\sigma^2}}$$ 을

(3)式에 代入하면

$$E(L)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\,p(A-\mu-x)\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+(q-p)(\mu-A-x)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$-p\sigma\, e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}+p\sigma\, e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}-(q-p)\sigma\, e^{-\frac{(A-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+q\sigma\, e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}-p\sigma\, e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\,p(A-\mu-x)\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+(q-p)(\mu-A+x)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$+q\sigma\, e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}-p\sigma\, e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-(q-p)\sigma\, e^{-\frac{(A-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)式에서 期待損失 最少値를 求하여 보면

$$\frac{dE(L)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-p\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu-x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-p(A-\mu-x)\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}+(q-p)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$+\frac{1}{\sigma}(q-p)(\mu-A+x)\,e^{-\frac{(A-x-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\frac{A-x-\mu}{\sigma^2}q\sigma\, e^{-\frac{(A-x-u)^2}{2\sigma^2}}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-p\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu-x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+(q-p)\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-p\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu-x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-p\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+q\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\Big]$$

$$\frac{dE(L)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-p\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+q\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$=-p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+q\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad\cdots\cdots(5)$$

(5)式의 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$를 y의 函數로 置換하면

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^A e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \fallingdotseq 1$이므로

$$\frac{dE(L)}{dx}=-p+q\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{A-x-\mu}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad\cdots\cdots(6)$$

(6)式을 0으로 놓으면

$$\int_{\frac{A-\mu-x}{\sigma}}^{\frac{A-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{p}{q}\sqrt{2\pi}$$

(6)式에서 最少値의 存在를 알기 爲하여 2次微分하면

$\frac{d^2E(L)}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{q}{\sigma}e^{-\frac{(A-\mu-x)^2}{2\sigma^2}}>0$이므로 最少値(Minimum)가 存在한다.

∴ 均等分布와 正規分布에 있어서 最少期待損失의 數値計算例의 結果는 最大期待收益에 있어서의 結果와 같다.

表 5 低運賃貨物의 受諾量에 따른 期待損失

低運賃 貨物 受諾量	$\frac{E(L)}{q\cdot A}$			
	$p/q=1/4$	$p/q=1/2$	$p/q3/4$	$p/q=1$
x = 0	0.1234	0.2468	0.3703	0.4937
1/8A	0.0937	0.1863	0.2881	0.3715
1/4A	0.0698	0.1316	0.1933	0.2550
3/8A	*0.0605	0.0913	0.1196	0.1531
1/2A	0.0762	*0.0762	0.0762	0.0762
5/8A	0.1222	0.0913	*0.0605	0.0296
3/4A	0.2051	0.1316	0.0698	0.0081
7/8A	0.2789	0.1863	0.0937	0.0011
1/1A	0.3703	0.2468	0.1234	*0.000

(註, 위의 값에 $q\cdot A$를 곱하면 期待損失이 된다.)