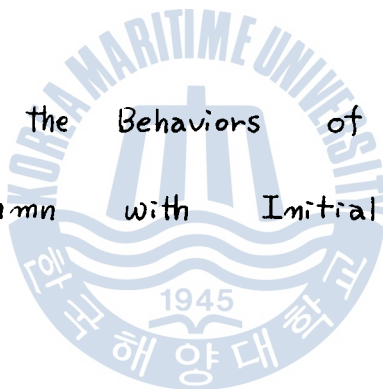


초기 곡률을 가진 기둥이 편심 하중을
받을 때의 거동에 관한 연구

A study on the Behaviors of Eccentrically
Loaded column with Initial curvature



지도교수. 王之錫



김상범 · 김중희 · 나명일

목 차

1. 서 론
2. 처짐방정식의 유도
3. 처짐곡선의 거동
4. 이론식에 의한 처짐과 실험에 의한 처짐과의 비교
- 1) 실험장치
- 2) 이론과 실험의 결과치
5. 결 론



A B S T R A C T

The equation for calculating the deflection of initially curved column under eccentric load is presented in this paper. Representing the initial deflection by Fourier series and solving the differential equation of column, the total deflection can be obtained. Assuming that the initial deflection is given

by
$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \cdot \sin \frac{\lambda \pi}{l} x,$$

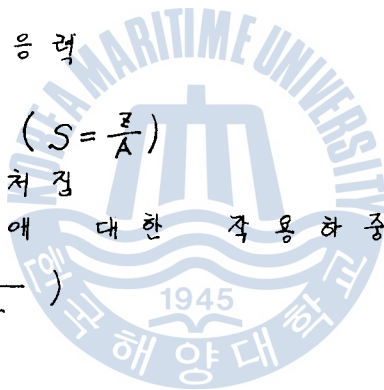
the total deflection is :

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda \pi}{kl}\right)^2 \cdot a_{\lambda}}{\left(\frac{\lambda \pi}{kl}\right)^2 - 1} \cdot \sin \frac{\lambda \pi}{l} x + C_a \left\{ \frac{l-x}{l} - \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} \right\} + C_b \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sin kx}{\sin kl} \right\}$$

The total deflection was plotted by computer program for the various curvature and loading condition. The experiments measuring the deflections of initially curved columns under eccentric loads were carried out and fairly good coincidence between the experimental and theoretical values was confirmed.

記 号 表

e:	하중 작용점의 편심 거리	(mm)
E:	탄성 계수	(kg/mm ²)
I:	단면 2차 모멘트	(mm ⁴)
k:	기둥에 대한 축하중 계수 ($k^2 = \frac{P}{EI}$)	(mm ⁻²)
l:	길이	(mm)
M:	굽힘 모멘트	(kg mm)
P:	기둥에 있어서 축하중	(Kg)
r:	회전 반경	(mm)
z:	단면 계수 ($z = \frac{I}{C}$)	(mm ³)
δ:	처짐	(mm)
σ:	단위 평균 응력	(kg/mm ²)
Q:	반력	(Kg)
S:	십반경 ($S = \frac{I}{A}$)	(mm)
u:	초기 최대 처짐	(mm)
α:	일계하중에 대한 작용하중의 비 ($\alpha = \frac{P}{P_{cr}}$)	



2. 처짐 방정식의 유도

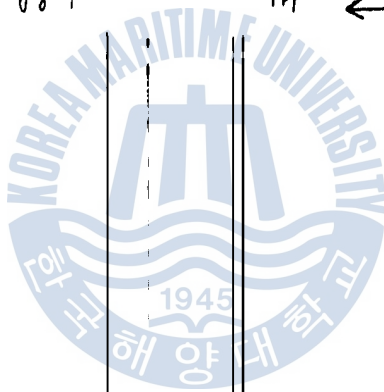
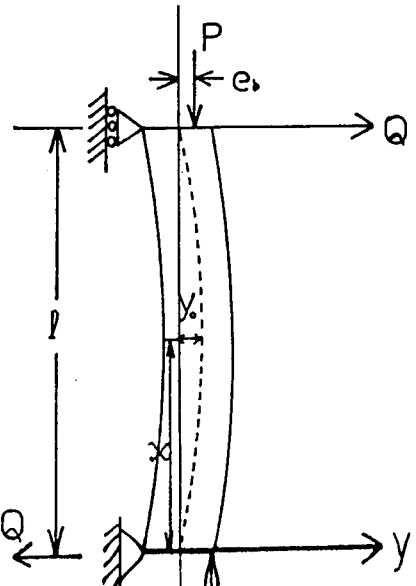
初期曲率 이 $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}$ 의

형태로 주어지고 偏心이 一
定하지 않게 作用하는 單純
支持기둥의 처짐方程式을
誘導한다.

Fig. 1에서 反力 Q는 다음
과 같다.

$$Q = \frac{e_a - e_b}{l} \cdot p \quad (1)$$

初期 처짐을 y_0 라 하고 荷 Q



2. 처짐 방정식의 유도

初期曲率 이 $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}$ 의

형태로 주어지고 偏心的인 單純 支持기둥의 처짐方程式을 誘導한다.

Fig. 1에서 反力 Q는 다음과 같다.

$$Q = \frac{e_a - e_b}{l} \cdot P \quad (1)$$

初期 처짐을 y_0 라 하고 荷重 P에 의한 처짐을 y_1 이라 하고 하면 처짐의 座標는 다음과 같이 表示된다.

$$y = y_0 + y_1 \quad (2)$$

그리고, 任意의 断面에 있어서 曲률모멘트는

$$M = P(y_0 + y_1 - e_b) - Q(l - x) \quad (3)$$

$$= P(y_0 + y_1 - e_a) + Q \cdot x \quad (4)$$

식 (2)의 反力 Q를 (4)식에 代入하면

$$M = P \cdot y_0 + P y_1 - P \cdot e_a + \frac{e_a - e_b}{l} \cdot P \cdot x \quad (5)$$

식 (5)를 微分方程式 ($EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$)에 代入하여 整理하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{P}{EI} y_1 = \frac{P}{EI} \left(-y_0 + e_a - \frac{e_a - e_b}{l} \cdot x \right) \quad (6)$$

初期曲率 $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}$ 를 代入하고 記号 $k^2 = \frac{P}{EI}$ 를 代入하면

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k^2 y_1 = -k^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} - k^2 \frac{e_a - e_b}{l} x + k^2 \cdot e_a \quad (7)$$

이 微分方程式의 一般解는 다음과 같이 表示된다.

$$y_1 = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - 1} a_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} - \frac{e_a - e_b}{l} x + e_a \quad (8)$$

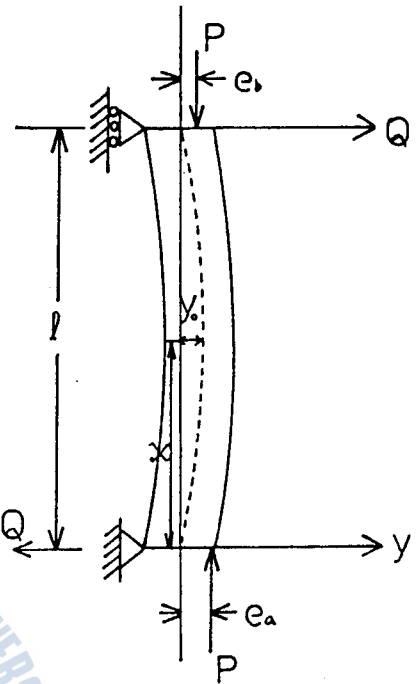


Fig. 1 Initially curved column under eccentric load.

Fig. 1과 같은 單純 支持 기둥의 경우에 境界 條件은 $x=0$ 일 때 $y=0$, 및 $x=l$ 일 때 $y=0$ 이다. 이 條件을 식 (8) 에 代入 하여 積分 常數 A 및 B 를 구하면

$$A = \frac{\cos kl}{\sin kl} \cdot e_a - \frac{1}{\sin kl} \cdot e_b, \quad B = -e_a \quad (9)$$

식 (9) 를 식 (8) 에 代入 하면 荷重 p 에 의한 처짐 y_1 은 다음과 같이 된다.

$$y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\left(\frac{i\pi}{kl}\right)^2 - 1} \cdot \sin \frac{i\pi}{l} x + e_a \left\{ \frac{l-x}{l} - \frac{\sin kl(l-x)}{\sin kl} \right\} + e_b \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sin kl x}{\sin kl} \right\} \quad (10)$$

그러므로 식 (10) 에 기둥의 初期 曲率을 합하면 기둥의 처짐 曲線式을 얻게 된다.

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{i\pi}{kl}\right)^2 \cdot a_i}{\left(\frac{i\pi}{kl}\right)^2 - 1} \cdot \sin \frac{i\pi}{l} x + e_a \left\{ \frac{l-x}{l} - \frac{\sin kl(l-x)}{\sin kl} \right\} + e_b \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sin kl x}{\sin kl} \right\} \quad (11)$$

식 (11) 에서 最大 처짐 點은 偏心 e_a, e_b 에 따라서 一定 하지 않다. 그러나 各 荷重의 기둥에 있어서 기둥의 條件과 偏心 量이 定해지면 比較 容易하게 求해 得 것이다. 만약 最大 처짐 點의 最大 처짐 點 x 를 알았다면 最大 모멘트는

$$M_{max} = p(e_a + \delta) + \frac{p}{l} (e_a - e_b) \cdot x \quad (12)$$

그러므로 最大 壓縮 應力은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{p}{A} + \frac{M_{max} \cdot c}{I} \\ &= \frac{p}{A} \left\{ 1 + \frac{e_a}{s} \left(1 + \frac{\delta}{e_a} + \frac{1}{l} \left(1 - \frac{e_b}{e_a} \right) \cdot x \right) \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

3. 처짐 곡선의 기둥

전 절에서 誘導 得 處 처짐 방정식 식 (11) 을 利用 하여 초기 처짐이 $y_0 = \sin \frac{i\pi}{l} x$ 의 형태로 주어지고 偏心 $e_a = -19 \text{ mm}$, $e_b = 15 \text{ mm}$ 에서 荷重이 60 kgf 과 80 kgf 作用 할 때 길이 $l = 1,000 \text{ mm}$, 탄성 계수 $E = 21300$ 직경 $d = 12 \text{ mm}$ 인 기둥의 처짐에 관하여 컴퓨터

GRAPHIC OF DEFLECTION CURVE

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=1
 LENGTH=1000
 LOAD=60
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-19
 ECCENTRICE EB=15
 DIAMETER=12
 CRITICAL LOAD=60

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=1
 LENGTH=1000
 LOAD=80
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-19
 ECCENTRICE EB=15
 DIAMETER=12
 CRITICAL LOAD=80

MAXIMUM DEFLECTION=2.59541949
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=357

MAXIMUM DEFLECTION=3.56397258
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=350

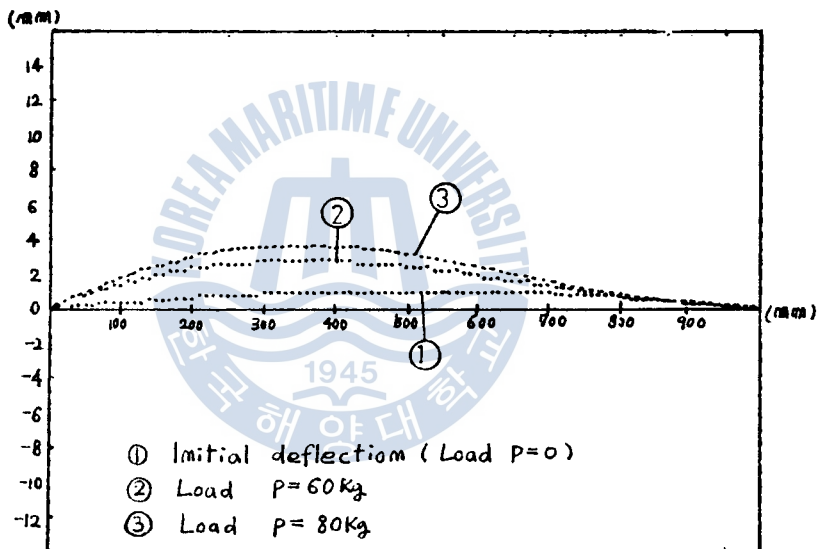


Fig.2 Behaviors of curved column with increasing loads.

Fig.2 에서 ① 은 初期曲率을 나타내고 ② 는 荷重 60 kg 이 作用할 때의 처짐이고 ③ 은 荷重 80 kg 이 作用할 때의 처짐이다.

그리고 초기 처짐이 $y_0 = 3 \cdot \sin \frac{i\pi}{l} x$ 의 형태로 주어지고 편심 $e_a = 19 \text{ mm}$, $e_b = 15 \text{ mm}$ 에서 荷重이 40 kg 라 60 kg 이 作用할 때 길이 $l = 1.000 \text{ mm}$, 관성계수 $E = 21300$, 직경 $d = 11 \text{ mm}$ 인 기둥의 처짐은 Fig 3 에 나타내어진다.

GRAPHIC OF DEFLECTION CURVE

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=3
 LENGTH=1000
 LOAD=40
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRIC EA=19
 ECCENTRIC EB=15
 DIAMETER=11
 CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=3
 LENGTH=1000
 LOAD=60
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRIC EA=19
 ECCENTRIC EB=15
 DIAMETER=11
 CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM DEFLECTION=-3.53446044
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=431

MAXIMUM DEFLECTION=-9.00510926
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=490

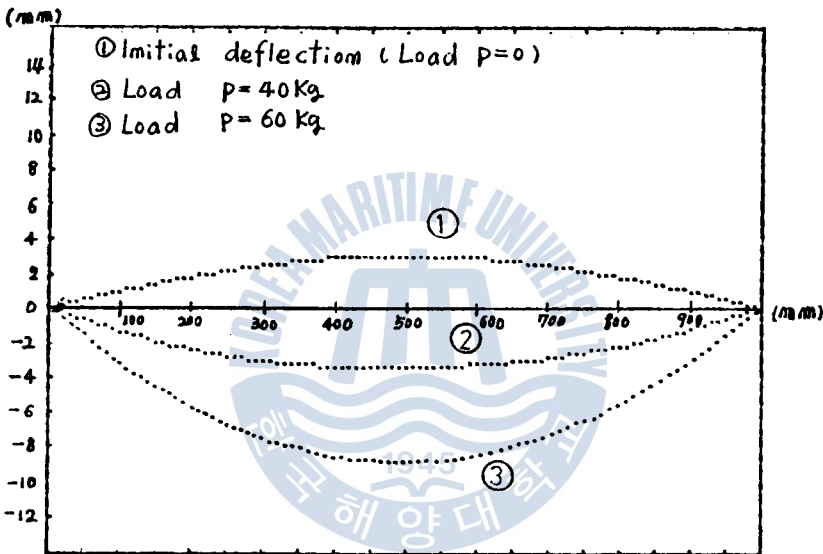


Fig.3 Behaviors of curved column with increasing loads.

Fig.3 에서 ①은 初期曲率을 나타내고, ②는 荷重 40kg 이 작용할 때의 처짐이고, ③은 荷重 60kg 이 작용할 때의 처짐이다.

그리고 初期 처짐이 $y_0 = 10 \cdot 61m \frac{2\pi}{l}$ 의 형태로 주어지고 偏心 $e_a = 5mm$, $e_b = 7mm$ 에서 하중이 60kg 과 100kg 이 작용할 때 길이 $l = 1,000mm$, 탄성계수 $E = 21300$, 직경 $d = 11mm$ 인 기둥의 처짐은 Fig.4 에 나타내어진다.

Fig.4 에서 ①은 初期曲率을 나타내고 ②는 하중 60kg 이 작용할 때의 처짐이고 ③은 荷重 100kg 이 작용할 때의 처짐이다.

GRAPHIC OF DEFLECTION CURVE

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=10
LENGTH=1000
LOAD=60
YOUNGS MODULUS=21300
ECCENTRICE EA=5
ECCENTRICE EB=7
DIAMETER=11
CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=10
LENGTH=1000
LOAD=100
YOUNGS MODULUS=21300
ECCENTRICE EA=5
ECCENTRICE EB=7
DIAMETER=11
CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM DEFLECTION=11.6540354
MAXIMUM DEFLECTION POINT=500

MAXIMUM DEFLECTION=11.7913418
MAXIMUM DEFLECTION POINT=500

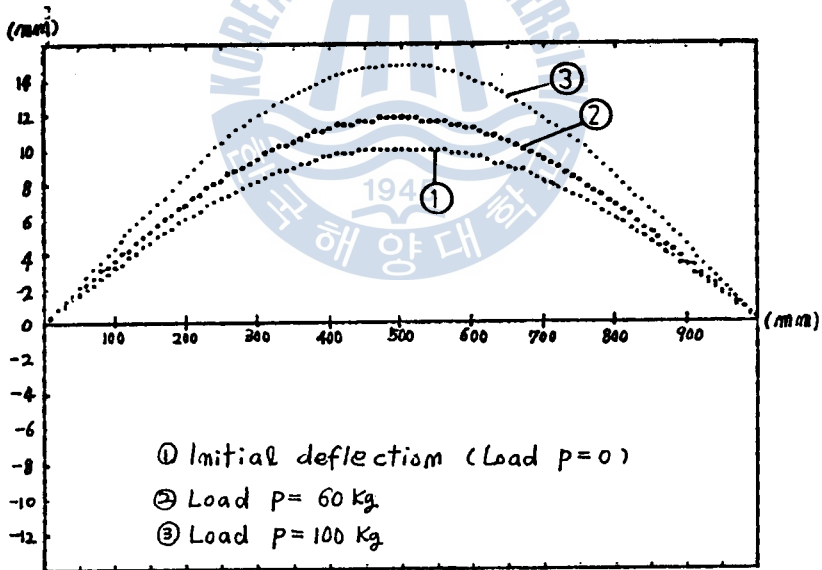


Fig.4 Behaviors of curved column with increasing loads.

4. 理論式에 의한 처짐과 實驗에 의한 처짐과의 比較

1) 實驗裝置에 關한 說明



Fig.5 Experimental Apparatus.

前節에서 訪導한 기둥의 처짐曲線式을 檢討하기
爲하여 初期曲率을 가진 기둥에 偏心的으로 荷重
을 作用시켜 처짐을 測定하고 前節의 처짐曲線式
에 의한 計算値와 比較하였다.
Fig.5는 實驗裝置를 보여주고 있다. Fig.6은 實驗
裝置의 平面圖를 그린 것이다.

4. 理論式에 의한 처짐과 實驗에 의한 처짐과의 比較

1) 實驗裝置에 의한 說明



Fig.5 Experimental Apparatus.

前節에서 誘導한 기둥의 처짐曲線式을 檢討하기
 爲하여 初期曲率을 가진 기둥에 偏心的으로 荷重
 을 作用시켜 처짐을 測定하고 前節의 처짐曲線式
 에 의한 計算値와 比較하였다.
 Fig.5는 實驗裝置를 보여주고 있다. Fig.6은 實驗
 裝置의 平面圖를 그린 것이다.

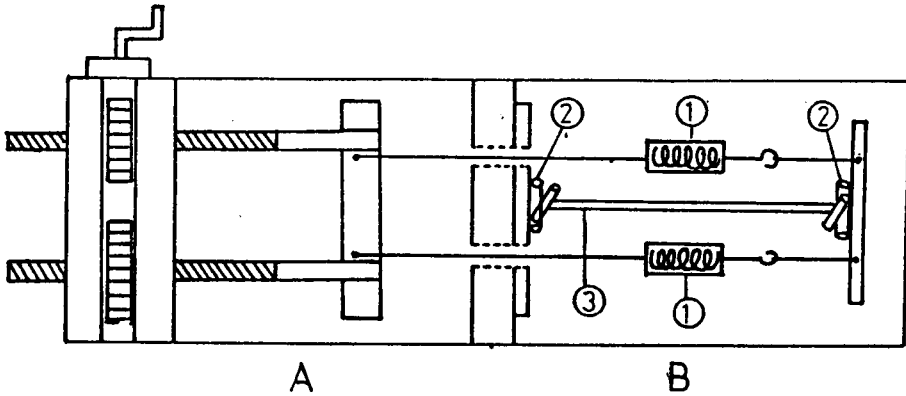


Fig.6 Schematic diagram of experimental Apparatus.

Fig.6 에서 A 부 는 기 어 를 祖 合 하 여 实 験 에 必 要
 한 荷 重 을 만 드 는 裝 置 이 고 B 부 는 기 登 의 初 終
 을 測 定 하 기 위 한 裝 置 이 다. B 부 에 있 어 서 ① 은
 荷 重 을 測 定 하 는 스프링 저울 이 고 ② 는 荷 重 을
 한 點 에 集 中 的 으 로 作 用 하 도 록 使 用 하 였 고 ③ 은
 初 期 曲 率 을 가 진 기 登 이 다.
 2) 理 論 과 实 験 의 結 果 值
 初 期 曲 率 을 가 진 단 순 지 지 보 에 荷 重 을 變 化 시
 키 고 偏 心 을 바 꾸 어 가 며 实 験 하 여, 前 節 에 서 誘 導
 한 이 론 적 인 初 終 과 实 験 으 로 測 定 한 初 終 을 比
 較 하 여 이 론 식 의 精 確 성 을 確 認 하 려 한 다.

IRUN
 GRAPHIC OF DEFLECTION CURVE
 #####

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=1
 LENGTH=1000
 LOAD=60
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-19
 ECCENTRICE EB=-15
 DIAMETER=12
 CRITICAL LOAD=213.980516

MAXIMUM DEFLECTION=9.62947515
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=498
 MAXIMUM MOMENT=1837.28651
 STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=11.3606479

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPERIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	3.55179198	2.4
200	6.07243254	5
300	8.06289475	6.7
400	9.26025951	8.5
500	9.62963953	8.6
600	9.16412798	8.4
700	7.89537438	6.6
800	5.88232553	5.2
900	3.21321257	2.7

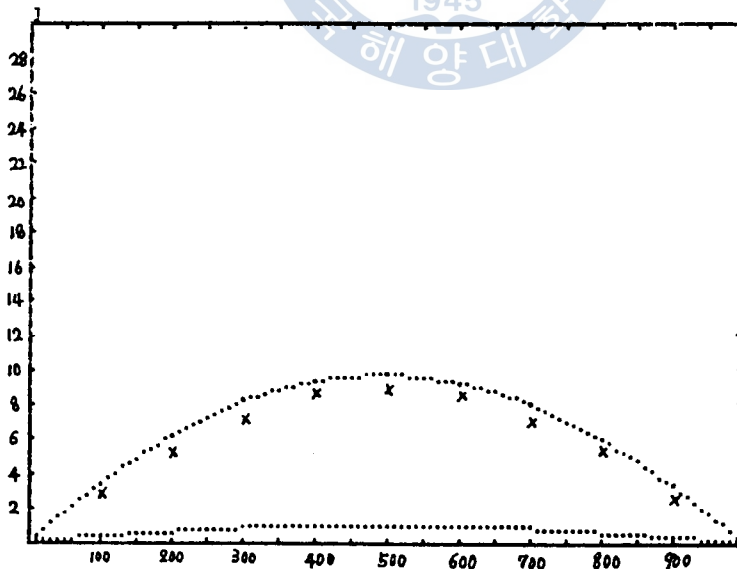


Fig.7 Comparison of theoretical and Experimental columns.

IRUN
 GRAPIC OF DEFLECTION CURVE
 #####

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=1
 LENGTH=1000
 LOAD=80
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-19
 ECCENTRICE EB=-15
 DIAMETER=12
 CRITICAL LOAD=213.980516

MAXIMUM DEFLECTION=14.258586
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=499
 MAXIMUM MOMENT=2220.36709
 STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=17.3323688

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPARIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	4.71726205	3.4
200	8.9092685	7.5
300	11.9055776	11.5..
400	13.7001967	12.7
500	14.2579629	13.1
600	13.5602966	11.8
700	11.676058	10.3
800	8.67942973	7.6
900	4.72494826	4.3

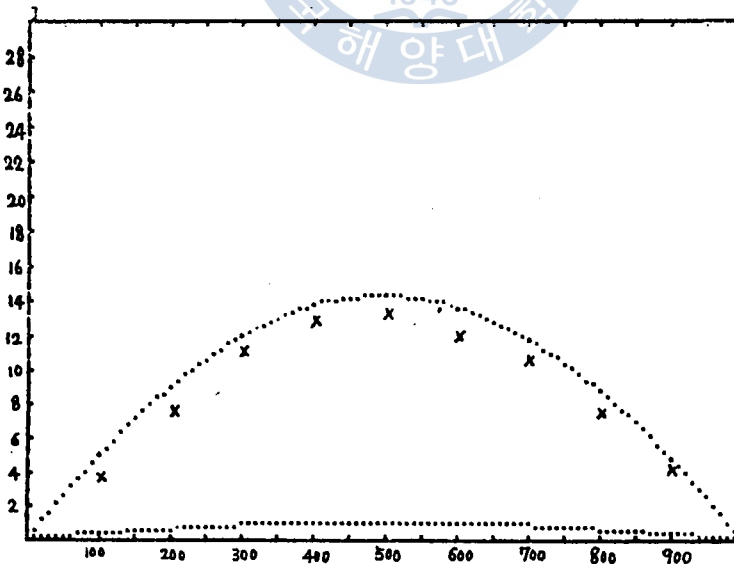


Fig.8 Comparison of theoretical and Experimental columns.

JRUN
GRAPIC OF DEFLECTION CURVE
#####

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=1
LENGTH=1000
LOAD=60
YOUNGS MODULUS=21300
ECCENTRIC EA=-23
ECCENTRIC EB=-10
DIAMETER=12
CRITICAL LOAD=213.980516

MAXIMUM DEFLECTION=9.39642317
MAXIMUM DEFLECTION POINT=462
MAXIMUM MOMENT=1360
STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=8.66510246

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPERIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	3.42926663	2.7
200	6.13452183	5.6
300	8.04974116	7.4
400	9.13633251	7.9
500	9.38631659	8
600	8.82390505	7.7
700	7.50529996	6.7
800	5.51667403	5
900	2.97043358	2.8

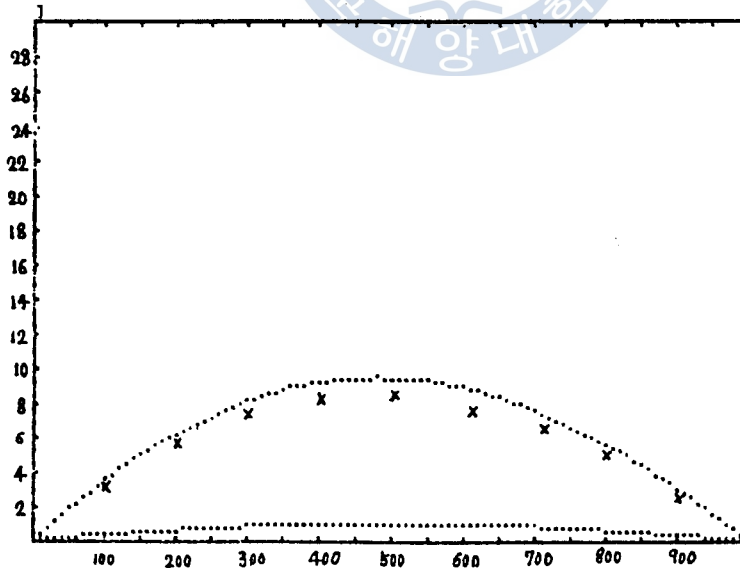


Fig.9 Comparison of theoretical and Experimental columns.

JRUN
 GRAPIC OF DEFLECTION CURVE
 #####

MAXIMUN INITIAL DEFLECTION=1
 LENGTH=1000
 LOAD=80
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-23
 ECCENTRICE EB=-10
 DIAMETER=12
 CRITICAL LOAD=213.980516

MAXIMUM DEFLECTION=13.9059405
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=483
 MAXIMUM MOMENT=3454.79524
 STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=21.0720864

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPARIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	5.0063335	4.7
200	9.00002222	8.6
300	11.8550007	11.2
400	13.4722516	12.6
500	13.8855847	12.7
600	13.0635763	12.1
700	11.1090621	10.6
800	8.15562299	8.8
900	4.38131366	4.5

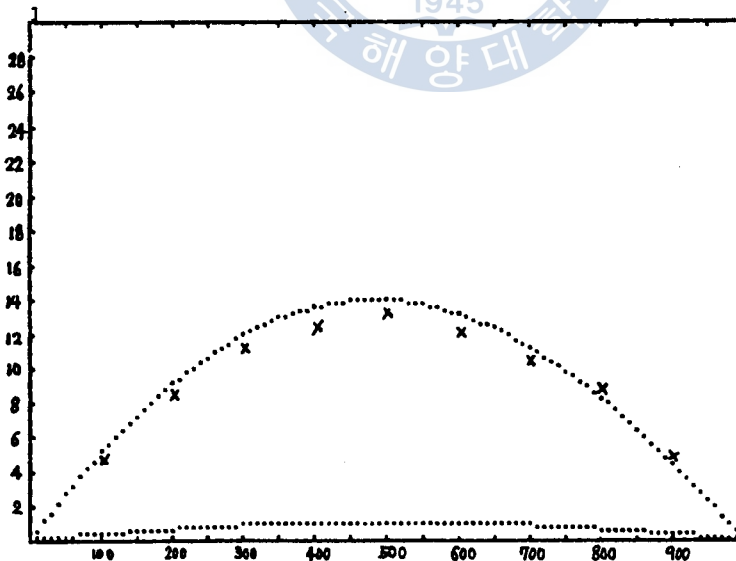


Fig.10 Comparison of theoretical and Experimental columns.

JRUN
 GRAPIC OF DEFLECTION CURVE
 #####

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=3.2
 LENGTH=1000
 LOAD=60
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-16.5
 ECCENTRICE EB=-10.5
 DIAMETER=11
 CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM DEFLECTION=16.4114135
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=495
 MAXIMUM MOMENT=2152.88481
 STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=17.1070193

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPARIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	5.57535382	4.1
200	10.2152476	6.2
300	13.6749193	10.6
400	15.7732926	12.4
500	16.4077503	13.6
600	15.5615950	12.9
700	13.3065953	11
800	9.7986035	6.6
900	5.26726754	4.8

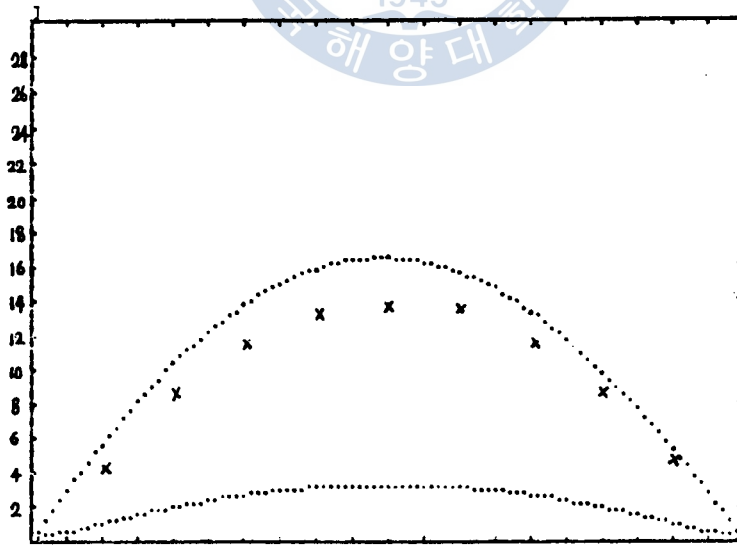


Fig.11 Comparison of theoretical and Experimental columns.

JRUN
 GRAPIC OF DEFLECTION CURVE
 #####

MAXIMUM INITIAL DEFLECTION=3.2
 LENGTH=1000
 LOAD=80
 YOUNGS MODULUS=21300
 ECCENTRICE EA=-16.5
 ECCENTRICE EB=-10.5
 DIAMETER=11
 CRITICAL LOAD=151.084527

MAXIMUM DEFLECTION=25.9470852
 MAXIMUM DEFLECTION POINT=497
 MAXIMUM MOMENT=3626.32682
 STRESS OF ECCENTRICES COLUMN WITH INITIAL CURVATURE=28.5934729

COMPARISON ON THEORETICAL AND EXPARIMENTAL DEFLECTION

LENGTH	THEORETICAL DEFLECTION	EXPERIMENTAL DEFLECTION
100	6.27264201	8.2
200	13.8702243	15
300	21.4576145	19.1
400	24.311211	21.5
500	25.9435408	22.5
600	24.5168445	20.8
700	20.9466376	18.2
800	15.3942056	13.5
900	8.24867254	8

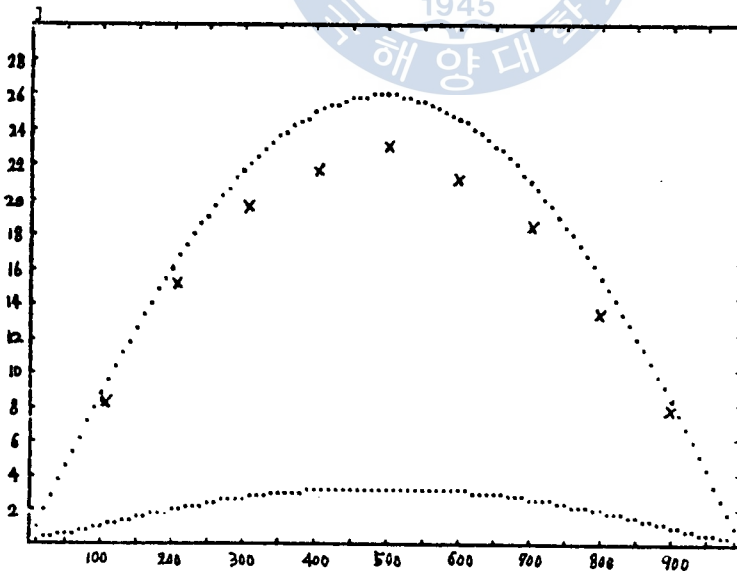


Fig.12 Comparison of theoretical and Experimental columns.

5. 結 論

初期曲率를 가진 單純기둥이 偏心荷重을 받을 때의 挙動을 理論과 實驗을 通하여 研究한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 初期처짐이 $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \text{Sim} \frac{i\pi}{l} x$ 로 表示되는 單純기둥이 上下端에서 각각 e_b, e_a 의 偏心位置에서 荷重을 받을 때의 처짐曲線은 다음과 같다.

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\frac{i\pi}{kl})^2 \cdot a_i}{(\frac{i\pi}{kl})^2 - 1} \cdot \text{Sim} \frac{i\pi}{l} x + e_a \left\{ \frac{l-x}{l} - \frac{\text{Sim} k(l-x)}{\text{Sim} kl} \right\} + e_b \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\text{Sim} kx}{\text{Sim} kl} \right\}$$

2) 上下端의 偏心이 다 같이 最大初期처짐보다 크고 이와 같은 방향이면 荷重이 增加함에 따라 처짐이 增加하는데 이때에는 初期처짐과 反처 방향이 된다.

3) 上下端의 偏心이 다 같이 最大初期처짐의 反처 방향이면 荷重이 增加함에 따라 처짐은 急速히 增加한다.

4) 上下端의 偏心이 다 같이 最大初期처짐보다 작으면 荷重이 增加함에 따라 처짐도 서서히 증가한다.

5) 上端과 下端의 偏心이 서로 反처 방향에 있을 때는 最大처짐이 發生하는 位置가 한 방향으로 이 동한다.

6) 初期曲率을 가진 單純기둥의 처짐에 關하여 本 研究에서 誘導한 理論式은 實驗과 잘 一致한다.

참고 문헌

- (1) Timoshenko , "ELEMENTS OF STRENGTH OF MATERIALS "
- (2) Gere & Timoshenko , " THEORY OF ELASTIC STABILITY "
- (3) J.W Dally & W.F Riley , " Experimental stress Analysis. "
- (4) Timoshenko & Goodier , " Theory of Elasticity "

