특수한 函數空間에 對한 考察

金 章 郁

A study on specific function space

Kim Chang Uk

Abstruct

In order to introduce the concept of function space, the author tried to discuss the solution of the problems in analysis. Firstly the author thried to get the solution of following equation, $x^5+3x+4=o$ This equation requires Newton's approximation. Secondly we must get the equation y (x) to meet the first order differential equation $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$. In this g is the function of the pair of actual number. One way to solve this problem is to get Picard method to produce the sequence, {yn}by solve— approximation by discussing two problems in analyis, and by abstracting this fact, suggestion of new creation of space is obtained, If we verify the results which can be applied to varies results, it will emphasizes that the attempt saves much efforts. For instance, scholars of analysis are making efforts in Banach space in order to save efforts. For the saving of such efforts, it must be known that similarities of the problem and those problems belong to the same category.

<目 次>

1. 序 論

函數空間의 槪念을 導入 하기위해서 해석학에서의 두 問題의 解를 논의한다. 첫째 다음 방정식의 解를 求하는 문제를 생각한다. $x^5+3x+4=0$ 이러한 문제는 보통 Newton 의 근사법을 쓴다는 것은 잘 알고있는 사실이다. 그리고 두번째 문제는 1階 미분방정식 $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$을 만족하는 函數 $y(x)$를 구하는 것이다. 여기서 g는 實數의 쌍 (x,y)의 函數이다. 이 문제를 해결 하는 한 방법은 근사해로된 列 $\{y_n\}$를 생기게 하는 Picard 방법을 찾는것도 또한 잘 알고 있는 사실이다. 해석학(解析學)의 이 두문제를 논의하여 이사실을 抽象하므로써 새로운 공간 창조의 암시를 얻게된다. 여기서 특히 여러가지 결과에 적용할수있는 결과를 證明해 두면 많은 노력을 절약할수 있다는 것을 강조한다. 例컨데 노력을 절약하기 위하여 解析學者들은 Banach 空間에 많은 노력을 기울이고 있다. 이러한 절약을 위해 여기서 문제의 유사성 이라든가 그들 문제가 같은 一般的 범주에 屬한다는 것을 알아야만 된다.

2. 單位閉區間上에서의 連續函數 全體로 이루어진 空間과 거리공간에서의 同値인 Cauchy列 全體가 이루는 空間

Theorem 1: J는 單位閉區間$[0,1]$의 모든 점으로된 R의 部分空間 B는 連續사상 $f:J\to R$전체로된 集合이라 한다. 이때 $\rho(f,g)=1,u,b\{|f(x)-g(x)|:x\epsilon J\}$로 정의된 사상 $\rho:B\times B\to R$는 集合 B의 거리이다.

Proof: f와 g를 B의 두元 이라한다 J가 compact이므로 任意의 點 $x\epsilon J$에 대하여 $|f(x)-g(x)|\leqq M$인 實數 M가 存在한다. 따라서 $\rho(f,g)$가 存在하며 실제로 $\rho(f,g)=|f(x_0)-y(x_0)|$인 點 $x_0\epsilon J$가 存在한다. 다음 성질이 성립한다.

i) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$ 여기서 $f,g\epsilon B$는 임의.

ii) $\rho(x,y)\geqq 0$

iii) $\rho(f,g)=0$일 條件은 모든 $x\epsilon J$에 대하여 $f(x)=g(x)$, 即 f와 g는 같은 사상이다. $f,g,h\epsilon B$라하자. $\rho(f,h)=|f(x_0)-h(x_0)|$인 點 $x_0\epsilon J$가 存在한다. $\rho(f,g)\geqq|f(x_0)-g(x_0)|$, $\rho(g,h)\geqq|g(x_0)-h(x_0)|$이므로 곧 $\rho(f,g)+\rho(g,h)\geq|f(x_0)-g(x_0)|+|g(x_0)-h(x_0)|\geq|f(x_0)-h(x_0)|=\rho(f,h)$임을 알수 있다.

따라서 ρ는 集合 B의 거리이다.

Theorem 2: S와 T를 거리공간, 각각의 거리를 ρ_S, ρ_T 그리고 K를 S의 部分集合이라 한다. 만일 사상 $f:K\to T$가 一様연속이면 S의 各點에서 f의 振動 $\omega(p)$는 零이다.

Proof: K의 各點 p에서 f가 連續이므로 $\omega(p)=0$, $S-\bar{K}$의 各點에서는 $\bar{K}$와 $S-\bar{K}$는 만나지 않으므로 $O\leq\omega(p)\leq\delta[f(S-\bar{K})\cap K)]=0$ $P\epsilon\bar{K}-K$인 경우만 말하면된다. $\varepsilon>0$이 주어져 있다고하자 一様연속성에 의하여 적당한 δ가 存在하여

$0\leq\omega(p)\leq\delta[f(S_{\delta/2}(p)\cap K]<\varepsilon$ 여기서 $S_{\delta/2}$는 거리 ρ_S에 關한 中心 ρ, 半徑 $\delta/2$인 球型近傍이다.

$q,r\epsilon S_{\delta/2}\subset K$라 한다. 이때 $\rho_S(q,r)\leq\rho_S(q,p)+\rho_S(pr)<\delta$이므로

$\rho_T(f(q),f(r))<\varepsilon$. 각 $P\epsilon\bar{K}-K$에 대하여 $0\leq\omega(p)<\varepsilon$이고 $\varepsilon>0$은 任意이므로 $\omega(p)=0$ 한편 $S=(S-\bar{K})\cup(\bar{K}-K)\cup K$이므로 모든 $P\epsilon S$에 대하여 $\omega(p)=0$

Theorem 3: S와 T는 각각 ρ_S, ρ_T를 거리로 갖는 거리공간, K는 S의 部分集合이고 $f:K\to T$는 K위에서 一様연속이라 한다. 이때 $\{K_n\}$을 K에서의 任意 Cauchy 列이라하면 $\{f(k_n)\}$는 T에서의 Cauchy 列이다.

Proof: $\{K_n\}$를 K에서의 Cauchy 列 이라하고, $\varepsilon>0$, f의 一様收斂性에 의하여 적당한 $\delta>0$가 存在하여 x_1, $x_2\epsilon K$이고 $\rho_S(x_1,x_2)<\delta$이면 $\rho_T(f(x_1),\ f(x_2))<\varepsilon$이 만족된다. 이 δ에 대하여 적당한 整數 N이 存在하여 $m,n>N$이면 $\rho_S(k_m,k_n)<\delta$가 成立한한다. 따라서 $m,n>N$이면 $\rho_T(f(k_m),\ f(k_n))<\varepsilon$이다. 이것은 $\{f(k_n)\}$가 T에서의 Cauchy 列 임을 의미한다.

Ex) S는 $x>0$인 모든 R의點 x로된 R의 部分空間이고 K는 $O<x\leq 1$인 모든 S의 點으로된 S의 部分集合이라 한다. $f(x)=\frac{1}{x}$로 定義된 연속사상 $f:K\to R$를 생각하자 Theorem 3을 보면 f는 一様연속이 아니다. 왜냐하면 $K_n=\frac{1}{n}$로 정의되는 K에서의 點列 $\{k_n\}$는 Cauchy

列이나 $\{f(k_n)\}$는 Cauchy 列이아니다.

f의 振動는 S의 各點에서 零이다. 이것은 S의 各點에서 f의 振動이 零이 된다는 것이 f가 一樣연속 이라는것 보다 약한조건 이라는것을 보여준다 따라서 Theorem 2의 逆은 成立하지 않는다. 서론에서 여러가지 경우에 적용되는 결과를 증명하므로써 노력이 절약된다는 것을 강조하였다. 그리고 문제 사이의 유사성을 발견 함으로써 노력을 절약할 수 있다는것도 말하였다. 이러한 경우 한 문제의 해결방법은 다른문제에도 적용 될수도 있다. 명백히 다른 두정리 即 하나는 一樣연속성에 관한것이고 또 하나는 一樣국부연속성에 관한 정리에 어떻게 같은 證明方法이 적용되는가를 例示하려한다.

Theorem 4: S와 T를 각각 거리 ρ_S, ρ_T를 거리로 갖는 거리공간 이라하고 K를 S의 *Compact*인 部分集合 이라한다.

i) 만일 $f:K\to T$가 연속사상이면 f는 一樣연속이다.

ii) K가 局部연결이면 K는 一樣局部 연결이다.

Proof: $\varepsilon>0$이고 이때 각點 $P\epsilon K$에 대하여 다음과 같이 정의되는 實數 $\delta_p>0$가 存在한다. 만일 f가 連續이고 q가 $K\cap S_{\delta p}(p)$의 點이면 $\rho_T(f_{(p)}, f_{(q)})<\varepsilon/2$ 한편 K가 국부연결이고 q가 $K\cap S_{\delta p}(p)$의 點이면 p와 q는 직경이 $\varepsilon/2$보다 작은 K의 連結部分集合에 포함된다.

球型近傍 $\{S_{\delta p/2}(p);P\epsilon K\}$는 Compact 集合 K의 被覆이다. 따라서 이중의 有限個 예컨데 $S\delta_{p1/2}$…………$S\delta_{pn}/2(p_n)$는 K를 被覆한다.

δ_p, …………δ_{pn} 중 最小인것을 2δ라고 표시한다. 분명히 $\delta>0$이다. x와y를 $\rho_S(x,y)<\delta$을 만족하는 任意의 K의 點이라한다. $\rho_s(p_i,x)\leqq\delta_{pi}/2, 1\leqq i\leqq n$인 整數 i가 存在함을 알수 있다. 따라서

$$\rho_s(p_i,\ y)\leqq\rho_s(p_i,x)+\rho_s(x,y)<\delta p_i$$

만일 K가 局部연결이면 K의 각점 x, y는 p_i와 함께 직경이 $\varepsilon/2$보다 작은 K의 한 연결 部分集合에 포함된다. 이두 連結集合의 和集合은 직경이 $\frac{\varepsilon}{2}$보다 작은 連結集合이다. 따라서 K는 一樣局部연결이다. 한편 만일 f가 연속이면

$$\rho_T(f(x),\ f(y)\leqq\rho_T(f(x),f(pi))+\rho_T(f(pi),f(y))<\varepsilon$$

따라서 f는 一樣연속이다.

Theorem 5: 任意의 $r>0$와 任意의 $q\epsilon T$에 대하여 $S^*_r(q)\cap S$는 連結集合이다.

Proof; 만일 $q\epsilon S$이면 $S^*_r(q)\cap S=S_r(q)$,

따라서 이 집합은 연결이다.

만일 $q\epsilon T-S$이면

$$S\cap S^*_r(q)=[\bigcup_{\substack{n\epsilon 1\\ n>1/r}} S_{\beta n}{}^*(q_n)]\cap S=\bigcup_{\substack{n\epsilon 1\\ n>1/r}} S_{\beta n}(q_n)$$

여기서 각集合 $S_{\beta n}(q_n)$가 連結집합임을 알고있다. 이들 집합이 共通點 q_M을 포함한다는 것을 證明하자 여기서 M은 $4/r$보다 큰 整數중 最小인 것이다.

$$\rho(q_M,q_n)=\rho^*(q_M,q_n)\leqq\rho^*(q_M,q)+\rho^*(q,q_n)<r/2$$

이고 $\beta_n=r-\rho^*(q_n,q)>3r/4$

이다. 따라서 모든 $n>4/r$에 대하여

$q_M \in S_{\beta n}(q_n)$이므로 集合 $S \cap S^*_r(q)$는 연결이다. 이 정리가 확장되어 다음과 같이 論할수있다. S는 M거리를 갖는 거리공간, T를 S의 한 完備化라한다. 이때만일 A가 T의 연결인 開集合이면 集合 $A \cap S$는 連結集合이다.

3. 결　　론

특수한 함수공간을 생각하여 그것이 완비임을 알고 그중 하나는 單位閉區間上에서의 連續函數전체로 이루어진 공간이고 다른 하나는 거리공간에서 同値인 Cauchy 列 全體가 이루는 空間임을 論하였다.

4. 참고문헌

① J. L. Kelley, General Topology Newyork, 1955.

② N. Bourbaki, Elements of Mathematics, General Topology Addison-Wesley 1966

③ 岩波 數學辭典 第2版 1970