

판요소의 탄소성 대변형 해석에 관한 연구

이 상 갑* · 안 정 희**

A Study on the Elastoplastic Large Deflection Analysis of Plate Elements

Lee Sang - Gab, Ahn Jeong - Hee

Abstract

The overall objective of this study is to develop a plate element for the buckling/collapse analysis of various plate/shell structures, and to perform two simple analyses of elastoplastic large deflection problem for validity of this element. Exact transversal warping term is included in the displacement fields for better representation of the effect of shear deformation. fully nonlinear theory is derived with consideration of the general nonlinear equilibrium equations for plates, and an efficient plasticity model is also implemented, suitable for material nonlinear behavior. It will be desirable to use this plate element for the next study of buckling/collapse analysis of plate/shell structures.

1. 서 론

선박 및 해양 구조물들은 기본적으로 판(plate) 또는 쉘(shell)부재로 구성되어 있으며, 이들 구조물 전체의 강도는 구성부재의 강성이나 강도에 크게 좌우된다. 또한 건조, 조립상 필연적으로 수반되는 초기 치짐(initial imperfection)이나 부정(misalignment)등으로 인한 좌굴(buckling) 또는 붕괴(collapse)등은 전체 구조물의 강성이나 강도에 심각한 영향을 미친다. 이와 같은 문제의 해석에는 기하

* 한국해양대학교 이공대학 조선공학과.

** 한국해양대학교 대학원.

학적인 대변형 뿐 아니라 재료의 비선형 거동을 잘 나타낼 수 있는 요소의 개발이 중요하다.

판은 선박 및 해양 구조물의 중요한 구조 요소로서, 70년대 이후에는 전단변형(shear deformation)을 근사적으로 고려한 Mindlin 판 이론에 바탕을 둔 요소 개발 및 해석 방법에 많은 연구가 수행되어 왔다^[1]. 전단변형에 의하면 판의 두께 방향으로의 전단응력 분포는 포물선의 분포를 나타낼 뿐 아니라, 상 하면에서는 전단응력이 존재하지 않는다. 그러나 기존의 Mindlin 판 이론에 의한 요소들은 이러한 조건을 만족시키지 못하고 있으므로 판이 두꺼워질수록 전단변형에 의한 단면의 전단 위핑(warping)의 영향을 효율적으로 나타내지 못하고 있다. 곡면으로 된 판 단면의 위핑형상을 회전된 단면에 미소 중첩하여 단면의 위핑을 나타내는 변위장을 사용하는 판 요소를 개발하여, 두꺼운 판의 경우 기존의 Mindlin 판 이론과 대비하여 전단변형으로 인한 처짐거동에 미치는 영향에 대한 연구도 수행되었다^[5].

Mindlin 판 이론에 의한 변위장을 통상 수치해석에 많이 사용되는 Von Karman 가정과 Washizu 원리^[6]에 기초를 둔 선형증분 평형방정식에 의한 정식화를 통한 결과의 타당성은 많은 논문에서 검증되어 있다^[1,2]. 방향 도함수(directional derivative)의 공식을 이용하여 변분형(variational form)으로 된 약세형 평형방정식(equilibrium equations in weak form)을 중간상태(intermediate configuration)에서 선형화(linearization) 함으로서 비선형 유한요소해석에 적합한 증분형 평형방정식을 구할 수 있다^[7,8]. 후자에 의한 완전 비선형 정식화(fully nonlinear formulation)를 통하여 일반적으로 전자의 정식화에 의하여 무시되는 미소 고차항이 대변형 거동에 대하여 미치는 영향도 고찰해 보아야 할 것이다.

합응력(stress resultants)으로 정식화함으로서 다축응력상태(multi-stress state)하에서의 적당한 항복곡면(yield surface)을 구하는 어려움도 피할 수 있고, 응력분포를 국부식으로 정확하게 그리고 재료가 항복되어 가는 과정을 쉽게 추적할 수 있게 하기 위하여 응력성분(stress components)으로 정식화하여 유한요소법에 의해 수치해석적으로 처리하는 것이 바람직하다. 재료의 비선형 거동을 잘 나타내고 큰 규모의 계산에 적합한 효율적인 금속소성(metal plasticity)모델로서 Simo & Taylor^[9]가 제안한 일관된 반환사상연산(consistent return mapping algorithm)을 판의 비선형 구성방정식(nonlinear constitutive equation)에 적합하게 변환하여 적용한다.

이 연구의 목적은 판이나 웨일구조물의 좌굴 또는 붕괴등을 보다 정확하게 해석할 수 있는 탄소성 대변형을 고려한 판요소(plate elements)의 개발에 있다. 이를 위한 판요소의 유효성(validity)을 보이고자 한다. 일반적으로 간단한 웨일이나 판구조의 탄소성을 고려한 대변형문제인 원통형 웨일지붕(cylindrical shell roof)과 1축 방향의 압축력을 받는 정사각형판의 거동을 해석하였다.

2. 판요소의 정식화

2. 1 판의 변위장(displacement field in plate)

Fig. 2.1과 같은 두께가 h 이고 $x_1 - x_2$ 를 중립면으로 하는 판의 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}) &= \bar{u}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \cdot \bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2) - \kappa \phi(x_3) \cdot \bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2), \quad (\alpha = 1, 2) \\ u_3(\mathbf{x}) &= \bar{u}_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

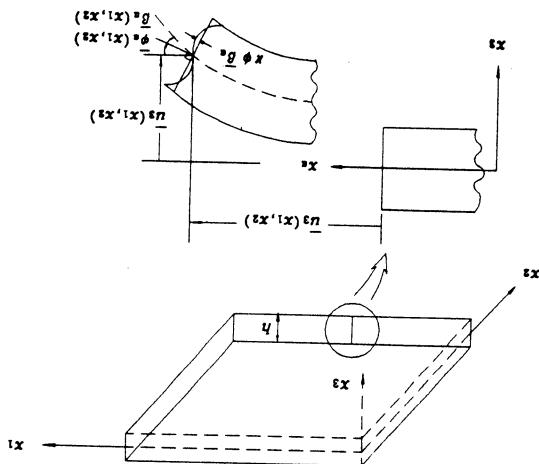


Fig. 2.1 Coordinate system and kinematic variables of plate.

여기에서 $\bar{u}_\alpha(x_1, x_2)$, $\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)$ 와 $\bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2)$ 은 아래와 같이 정의되고, Fig. 2.1과 같은 기하학적 의미를 갖는다.

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(x_1, x_2) &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_\alpha(x) dx_3 \\ \bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2) &= -\frac{1}{I} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 u_\alpha(x) dx_3, \quad I = \frac{h^3}{12} \\ \bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2) &= \bar{u}_{3,\alpha}(x_1, x_2) - \bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (2.2)$$

그리고 $\phi(x_3)$ 는 위평함수로서 다음과 같은 3차 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi(x_3) = \frac{2}{h^2} x_3^3 - \frac{3}{10} x_3 \quad (2.3)$$

변위장 (2.1)의 κ 는 전단계수로서 판의 상하면에서 두께 방향으로의 전단응력이 0이라는 조건으로 부터 $5/6$ 이 된다. 미소전단위평 $\kappa \phi(x_3) \beta_\alpha(x_1, x_2)$ 은 Fig. 2.1과 같이 평균화전단면에 수직으로 중첩된다.

$\bar{u}_\alpha(x_1, x_2)$, $\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)$, $\bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2)$, $\bar{u}_3(x_1, x_2)$ 는 위에서 언급한 물리적인 의미외에, 모두 $x_1 - x_2$ 중립면에서 정의되고, 선형독립변수로 취급할 수 있으므로 C_0 연속성을 가진 보간함수(interpolation fuction)를 사용할 수 있다. 판의 변위장 (2.1)에서 $\bar{\beta}_\alpha(x_1, x_2)$ 항을 제외하면 기존의 Mindlin 이론에 따른 5 자유도 (degree of freedom)의 변위장이 된다.

2.2 평형 방정식(Equilibrium Equations, Weak Form)

두께가 h 이고 부분적으로 매끈한 경계 $\partial\Omega$ 를 가지는 평면 Ω 인 평판에서, 시간 $t=0$ 일 때의 기준상태(reference configuration) $B \equiv (0, L) \times \Omega \subset \mathbf{R}^3$ 에서의 기준좌표계는 \mathbf{X} 로 정의하고, 시간 t 인 현재상태(current configuration)에서의 공간좌표계는 \mathbf{x} 로 나타낸다. 변형사상(deformation map)은 $\phi : B \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 로, 그리고 변형구배(deformation gradient)는 $\mathbf{F} = \partial\phi / \partial\mathbf{X}$ 로 나타낸다. 절점 $X \in B$, $x \in \phi(B)$ 들은 각각 그들의 위치벡터 \mathbf{X} 와 \mathbf{x} 로서 표현한다. 변형사상은 Lagrangian 수식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\phi = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (2.4)$$

여기에서 변위 $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ 는 판의 변위장 (2.1)이다.

임의의 경계조건을 만족하는 허용변분(kinematically admissible variation) η 에 대하여 다음과 같이 약세형으로 평형 방정식을 표현할 수 있다⁸⁾.

$$G(\phi, \eta) = \int_B \mathbf{P} : (\mathbf{D}\mathbf{F} - \eta) dV - \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta dV - \int_{\partial B} \tau \cdot \eta dS = 0 \quad (2.5)$$

여기에서 P 는 제1 Piola-Kirchhoff 응력텐서(stress tensor), ρ_0 는 기준상태에서의 밀도이고, B 는 체적력이다. 그리고 표면력(traction) t 는 경계부분 ∂B_t 에서, 변형은 경계부분 ∂B_u 에서 규정된다. 즉 $\partial B_u \cup \partial B_t = \partial B$, $\partial B_u \cap \partial B_t = \emptyset$. 편의를 위해 제1 Piola-Kirchhoff 응력텐서는 제2 Piola-Kirchhoff 응력텐서 ($\mathbf{S}=\mathbf{F}\mathbf{P}$)로 대치하고, 이에 대응되는 Green-Lagrangian 변형도텐서 $\mathbf{E}=(\mathbf{F}'\mathbf{F}-1)/2$ 를 사용한다. 그리고 $D\mathbf{F} \cdot \eta$ 는 변형구배의 변분으로서 다음과 같은 방향 도함수(directional derivative)의 공식을 이용하여 구한다⁷⁾.

$$D\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X})) \cdot \eta = \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{u} + \varepsilon \eta)]_{\varepsilon=0} \quad (2.6)$$

다음 절 2.3에서 언급하고자 하는 Von Karman 가정과는 달리 Green-Lagrangian 변형도텐서의 모든 고차항을 고려하고, 방향 도함수의 공식을 이용함으로서 기하학적으로 완전한 비선형(fully nonlinear)의 증분방정식을 다음과 같이 유도된다.

중간상태 $\phi : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ 에 대한 평형방정식 (2.5)을 선형화하면 다음과 같다.

$$L[G]_{\bar{\phi}} = \int_B (D\mathbf{F} \cdot \eta)_{\bar{\phi}} : [\mathbf{S} \otimes 1 + \mathbf{F}' \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}]_{\bar{\phi}} : (D\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{u})_{\bar{\phi}} dV + G(\bar{\phi}, \eta) \quad (2.7)$$

여기에서 1은 단위 매트릭스이고, $\Delta \mathbf{u} : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ 는 변위증분이다. 그리고 적분항은 접선강성도(tangent stiffness)로서, 그것의 첫째항은 기하학적인 부분이고 둘째항은 재료적인 항이다. 마지막 항은 불평형력(out-of-balance force)로서 다음과 같고, ϕ 가 평형상태이면 없어진다.

$$G(\bar{\phi}, \eta) = \int_B \mathbf{P} : (D\mathbf{F} \cdot \eta)_{\bar{\phi}} dV - \int_{\partial B} \bar{t} \cdot \eta dS \quad (2.8)$$

식 (2.7)은 유한요소법(Finite Element Method)으로 취급하기가 적당한 형태로 되어있다. 일반화된 변위 $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ '는 절점변위 $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3, \psi_1, \psi_2, B_1, B_2]'$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{U}_\alpha \quad (2.9)$$

여기에서 $h_\alpha(\mathbf{X})$ 는 C_0 의 연속성을 갖는 보간함수이고, N 은 각 요소의 절점수이다. 판의 변위장 (2.1)과 식 (2.9)에서 변위구배(displacement gradient)는 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{GRAD} \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{X}) \mathbf{U}_\alpha \quad (2.10)$$

여기에서 $\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{X})$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} h_{\alpha,1} & 0 & 0 & -x_3 h_{\alpha,1} & 0 & -\kappa \phi h_{\alpha,1} & 0 \\ h_{\alpha,2} & 0 & 0 & -x_3 h_{\alpha,2} & 0 & -\kappa \phi h_{\alpha,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_\alpha & 0 & -\kappa \phi, 3 h_\alpha & 0 \\ 0 & h_{\alpha,1} & 0 & 0 & -x_3 h_{\alpha,1} & 0 & -\kappa \phi h_{\alpha,1} \\ 0 & h_{\alpha,2} & 0 & 0 & -x_3 h_{\alpha,2} & 0 & -\kappa \phi h_{\alpha,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_\alpha & 0 & -\kappa \phi, 3 h_\alpha \\ 0 & 0 & h_{\alpha,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{\alpha,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

위의 결과를 사용하여 선형화된 평형방정식 (2.7)은 충분 절점변위 $\Delta \mathbf{U}$ 에 대하여 다음과 같은 표준적인 이산화 문제(discrete problem)로 귀납된다.

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{f}_t \quad (2.12)$$

여기에서 접선강성도 \mathbf{K}_t 와 불평형력 \mathbf{f}_t 는 모든 요소의 합으로서 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_t = \sum_e \int_B \mathbf{B}' [\mathbf{S} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{F}' \mathbf{D}^{ep} \mathbf{F}] \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{f}_t = \mathbf{F}_t - \sum_e \int_B \mathbf{B}' : \mathbf{P}_\phi dV \quad (2.13)$$

여기에서 \mathbf{F}_t 는 현재의 작용 절점하중 벡터이다.

2.3 Von Karman 가정하의 정식화

Greeen-Lagrangian 변형을 텐서 $\mathbf{E} = (\mathbf{F}' \mathbf{F} - \mathbf{I})/2$ 를 선형변형을 텐서(linear strain tensor) ε 과 회전 텐서(rotation tensor) ω 의 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + 1/2(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}) \quad (2.14)$$

일반적으로 Lagrangian 공식화에서 미소 변형율(infinitesimal strain)과 작은 회전(small, finite rotation), 즉 $\varepsilon \ll \omega \ll 1$ 이라는 Von Karman의 가정을 따르면, 위의 Greeen-Lagrangian 변형을 텐서는 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$E_{ij} \approx \varepsilon_{ij} + 1/2 \omega_{ki} \omega_{kj}, \quad \omega_{kk} = 0 \quad (2.15)$$

이 변형율의 충분형에 관의 변위장 (2.1)를 대입하고, 충분변위 $\Delta \mathbf{u}$ 를 충분 절점변위 $\Delta \mathbf{U}$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Delta E_{11} \\ \Delta E_{22} \\ \Delta 2E_{12} \\ \Delta 2E_{23} \\ \Delta 2E_{31} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{i,1} & 0 & 0 & -u_3 h_{i,1} & 0 & -\kappa \phi h_{i,1} & 0 \\ 0 & h_{i,2} & 0 & 0 & -u_3 h_{i,2} & 0 & -\kappa \phi h_{i,2} \\ h_{i,2} & h_{i,1} & 0 & -u_3 h_{i,2} & -u_3 h_{i,1} & -\kappa \phi h_{i,2} & -\kappa \phi h_{i,1} \\ 0 & 0 & h_{i,2} & 0 & -h_i & 0 & -\kappa \phi h_i \\ 0 & 0 & h_{i,1} & -h_i & 0 & -\kappa \phi h_i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \\ \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ B_{1i} \\ B_{2i} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_3 h_{j,1} h_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 h_{i,2} h_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 (h_{j,2} h_{i,1} + h_{j,1} h_{i,2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \\ \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ B_{1i} \\ B_{2i} \end{pmatrix} \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

식 (2.16)의 우변 첫째항은 선형부분이고 둘째항은 비선형부분으로서 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_t \Delta \mathbf{U} + \mathbf{B}_{nl} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U} \quad (2.17)$$

Washizu 원리에 기초를 둔 증분이론에 의한 선형증분 평형방정식에 변형율 증분 (2.17)을 대입하여 정리하면 (2.12)와 같은 비선형의 증분방정식으로 유도된다. 접선강성도 \mathbf{K}_t 와 불평형력 \mathbf{f}_t 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_t = \sum_c \int_B [\mathbf{k}_g + \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2] dV, \quad \mathbf{f}_t = \mathbf{F}_t - \sum_c \int_B \mathbf{B}' \mathbf{S} dV \quad (2.18)$$

여기에서 접선강성도 \mathbf{K}_t 의 우변 적분항중에서 첫째항 \mathbf{k}_g 는 기하학적 부분(geometric part)이고 나머지 항들은 재료적인 부분(material part)으로서 다음과 같다.

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{B}_{nl}' \mathbf{S}, \quad \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2 = \mathbf{B}_t' \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_t' \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_{nl} + \mathbf{B}_{nl}' \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_{nl}' \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_{nl} \quad (2.19)$$

식 (2.18)과 (2.19)에서의 \mathbf{S} 은 식 (2.15)의 공학 변형율(engineering strain) E 에 대응되는 응력(stress)이다.

이상과 같은 Von Karman의 가정을 Washizu 원리에 기초를 둔 증분이론에 의한 선형증분 평형방정식에 적용하면 식 (2.7)과 같은 완전 비선형에 의한 정식화에서 고려되는 미소 고차항이 통상 무시된다. 대변형 문제를 해석할 때 이들의 영향을 고찰해 보는 것은 바람직 할 것이다. 다음 절에서는 식 (2.7), (2.13)과 (2.19)의 탄소성 구성방정식 \mathbf{D}^{ep} 을 고찰하고자 한다.

본 논문에서는 8 절점의 Serendipity 판 요소를 사용했으며, 두께 방향은 Gauss-Lobatto 적분법, 평

면에서는 shear locking을 방지하기 위하여 감자적분법(reduced integration – 2×2 Gaussian 적분법)을 사용하였다. Gauss-Lobatto 적분법에는 Mindlin 이론에 의한 요소에는 3점, 위평행을 고려한 관이론에 의한 요소에는 5점의 적분점을 사용하였다.

2.4 소성모델(plasticity model)

비선형 동방성 경화법칙(nonlinear isotropic hardening rule)과 선형 이동 경화법칙(linear kinematic hardening rule)을 재료의 전형적인 모델로 정하고, 일반적인 비선형 구성방정식의 효율적인 수치계산에는 반환사상연산(return mapping algorithm)⁹⁾을 적용한다. 비선형 동방성 경화법칙의 전형적인 모델은 다음과 같이 선형부분과 지수부분으로 이루어진다.

$$\kappa(\bar{e}^p) = \kappa_0 + \kappa \bar{e} + (\kappa_\infty - \kappa_0)[1 - e^{-r\bar{e}}], \quad \bar{e} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \bar{e}^p \leq \bar{e}_{sh} \\ \bar{e}^p - \bar{e}_{sh} & \bar{e}_{sh} \leq \bar{e}^p \end{cases} \quad (2.20)$$

여기서 κ_0 은 항복곡면(yield surface)의 초기반경이고, κ_∞ 은 그것의 극한반경, K 은 선형경화율, 그리고 γ 은 지수경화의 초기율이다. 변수 \bar{e}^p 은 등가 소성변형도(equivalent plastic strain)로서 항복플래토(yield plateau)도 고려하고 있으며, \bar{e}_{sh} 가 항복플래토 구간의 길이를 나타낸다. 탄성 응력, 변형도의 성분과 탄성접선계수는 다음과 같다.

$$\mathbf{S} = [S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}]^T, \quad \mathbf{E}^c = [E_{11}, 2E_{12}, 2E_{13}, E_{22}, 2E_{23}]^T, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

여기에서 사용하고 있는 연산의 기본적인 개념은 탄소성 방정식들을 일반화된 중점법칙(generalized midpoint rule)을 적용하여 반환사상연산을 구축하는 것으로, Newton-Raphson 방법을 2차 점근율로 수렴시키는 일관된 탄소성 접선계수(consistent elastoplastic tangent modulus)를 계산하는데 있다. 이들을 요약하면 아래의 Table 2.1 – 2.2와 같다. Table 2.1에서 Q와 P는 편리를 위하여 도입한 행렬들로서 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Table 2.1 Return Mapping Algorithm.

- 1) Update strain tensor and compute trial elastic stresses
 $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \nabla^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{S}^E = \mathbf{D}(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^P), \quad \eta^E = \mathbf{S}^E - \alpha_n, \quad \xi^E = \mathbf{Q}^T \eta^E$
- 2) Check the trial elastic stresses for yielding state
 $|\phi^E| = |\frac{1}{2} \eta^E : \eta^E - \frac{1}{3} \kappa^2| \leq 0?$
- 3) Solve $\phi(\lambda) = 0$ for λ , enforcing consistency condition at t_{n+1} from Table 2.2
- 4) Compute modified elastic tangent moduli : $\mathcal{E}(\lambda) = [\mathbf{D}^{-1} + \frac{\lambda}{1+2\beta/\lambda H} \mathbf{P}]^{-1}$
- 5) Update stresses, plastic strain and back-stresses of yield surface

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{1+2\beta/\lambda H} \mathcal{E}(\lambda) \mathbf{D}^{-1} \eta_{n+1}^E$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\beta/\lambda H \eta_{n+1}$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \eta_{n+1} + \alpha_{n+1}$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^P = \mathbf{E}_n^P + \lambda \mathbf{P} \eta_{n+1}$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^P = \bar{\mathbf{e}}_n^P + \sqrt{2\beta/\lambda} \phi(\lambda) \quad (\phi(\lambda) \text{ from Table 2.2})$$
- 6) Compute consistent elastoplastic tangent moduli :

$$[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}]_{n+1} = \mathcal{E} - \frac{(\mathcal{E} \mathbf{P} \eta_{n+1})(\mathcal{E} \mathbf{P} \eta_{n+1})^T}{\eta_{n+1}^T \mathcal{E} \mathbf{P} \eta_{n+1} + Y_{n+1}} = Q_{n+1}$$
where, $\bar{Y}_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{Y_1}{Y_2} (\kappa'_{n+1} Y_1 + H Y_2) \eta_{n+1}^T \mathbf{P} \eta_{n+1}$

$$Y_1 = 1 + 2\beta/\lambda H, \quad Y_2 = 1 - 2\beta/\kappa'_{n+1} \lambda$$

Table 2.2 Determination of Plastic Lagrange Multiplier.

- 1) $\bar{\phi}^2(\lambda^{(k)}) = \frac{1/3(\xi_{22}^E)^2}{(1+\bar{E}\lambda^{(k)})^2} + \frac{(\xi_{22}^E)^2 + 2[(\xi_{12}^E)^2 + (\xi_{23}^E)^2 + (\xi_{31}^E)^2]}{(1+\bar{G}\lambda^{(k)})^2}$
where, $\bar{E} = 1/3 E(1-v) + 2/3 H, \quad \bar{G} = 2G + 2/3 H$
- 2) $\bar{\mathbf{e}}_n^{P(k)} = \bar{\mathbf{e}}_n^{P(k-1)} + \sqrt{2/3}\lambda^{(k)}\phi(\lambda^{(k)})$
- 3) $\phi(\lambda^{(k)}) = 1/2 \bar{\phi}^2(\lambda^{(k)}) - 1/3 K^2(\bar{\mathbf{e}}_n^{P(k)})$
- 4) $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{\phi(\lambda^{(k)})}{\phi'(\lambda^{(k)})}$

$$\phi'(\lambda^{(k)}) = -(1 - 2/3 \phi(\lambda^{(k)})) \left[\frac{1/3 \bar{E}(\xi_{11}^E)^2}{(1+\bar{E}\lambda^{(k)})^3} + \frac{\bar{G}[(\xi_{22}^E)^2 + 2\{(\xi_{12}^E)^2 + (\xi_{23}^E)^2 + (\xi_{31}^E)^2\}]}{1+\bar{G}\lambda^{(k)})^3} \right] - 2/3 \kappa' \bar{\phi}^2(\lambda^{(k)})$$
- 5) If $|\phi/\phi'| > \text{tol}$, then $k \leftarrow k+1$ and go to 1)

3. 수치해석 및 고찰

Mindlin 판 요소에 대하여 제안한 판의 변위장에 의한 판 요소의 판의 두께에 대한 전단변형의 영향을 기하학적인 선형해석 범위에서 검토하여 타당성을 검증한 바 있다¹⁾. 여기서는 판부재의 좌굴 및 좌굴 후의 기하학적인 비선형성을 포함한 탄소성 대변형 거동을 간단한 두 가지 경우에 대하여 검토하고자 한다. 각각에 대하여 탄소성 해석도 수행하여 현실성 있는 거동을 유추하고자 한다. 여기서 수행하는 판의 두께는 변의 길이에 대한 두께의 비 h/a 가 0.1이내인 대체로 얇은 판의 경우에 수행함으로 Mindlin 이론에 의한 판 요소를

사용한다. 그리고 Von Karman에 의한 가정에서 무시되는 고차항들의 영향은 완전 비선형으로 정식화한 해석 결과와 비교함으로서 검토한다. 첫째는 snap-through 및 snap-back 현상이 나타나는 원통형 쉘 지붕(cylindrical shell roof)에 대하여 곡률, 두께 그리고 경계조건에 대한 비선형 거동을, 다음은 초기처짐을 가진 주변이 단순지지된 정사각형판의 1축 방향의 압축력을 받는 경우의 탄소성 대변형 거동을 해석하였다. 비선형해석은 변위제어법인 호장법(arc length method)^{10,11,12)}을 사용하였다.

3. 1 원통형 쉘 지붕(cyclidrical shell roof)

우선 개발된 관요소의 검증을 위하여 이미 해가 알려진 원통형 쉘 지붕에 집중하중이 작용하는 예제를 사용하였다. 여기서는 기하학적인 비선형 거동을 정확하게 표현하고자 유한요소의 기하학적 위치를 나타내는 변위함수를 Taylor 급수로 2차항까지 전개함으로서 유한회전 중분을 고려한 만곡된 쉘요소¹³⁾를 사용한 결과와 비교하였다. Fig. 3.1과 같이 길이(L)와 폭(b)이 각각 508mm인 원통형 쉘 지붕에 대하여 길이 방향의 양쪽 끝단은 단순지지시키고 폭 방향으로는 자유단으로 하여 중앙에 집중하중 P 를 작용시켰다. 곡률($1/R$)은 $1/2540\text{mm}$ 에 쉘의 두께(h) 6.35와 12.7mm에 대하여 기하학적인 비선형 거동을 고찰하였다. 탄성계수(E)는 3.10275kN/mm^2 이고 Poisson계수(ν)는 0.3이다. 이때 원통형 쉘 지붕이 대칭임을 고려하여 1/4 분면을 20개의 요소(5×5 mesh)로 분할하여 사용하였다.

 각 두께에 대한 하중 - 처짐 곡선(load-deflection curve)을 Fig. 3.2에 나타내었다. Fig. 3.2(a)와 같이 두께가 6.35mm인 경우에는 snap-back 현상이 나타나고 있으며, snap-through 현상은 Fig. 3.2(b)와 같이 두께가 12.7mm인 경우에 나타나고 있다. 전반적인 거동이 잘 일치하고 있음을 보여주고 있으므로, 현재의 관요소는 충분한 정도로서 기하학적인 비선형거동을 해석할 수 있을 것으로 사료된다. Figure에는 나타나 있지않지만 두께가 6.35mm인 경우 100개의 요소(10×10 mesh)로 분할하여 사용한 결과와 snap-back 이 일어난 뒤의 거동에 아주 작은 차이만 보였을 뿐 거의 동일하였다. 그러므로 앞으로는 20개의 요소(5×5 mesh)를 사용할 것이다. 그리고 snap-back 현상을 처짐형상으로 Fig. 3.3에 나타내었는데 Fig. 3.3(c),(d),(e)는 그 현상을 잘 나타내고 있다.

다음에는 폭(b)이 2.000mm인 원통형 쉘 지붕의 곡률과 두께, 지지면의 구속정도, 재료의 탄소성에 대한 영향등을 Von Karman 가정하의 정식화와 완전 비선형에 의한 정식화에 따른 결과들을

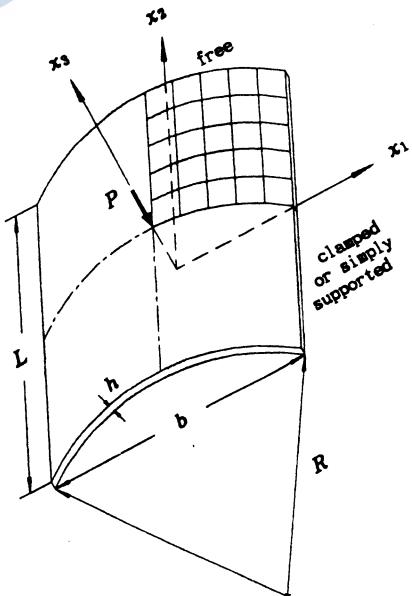


Fig. 3.1 Coordinate system of cylindrical shell roof.

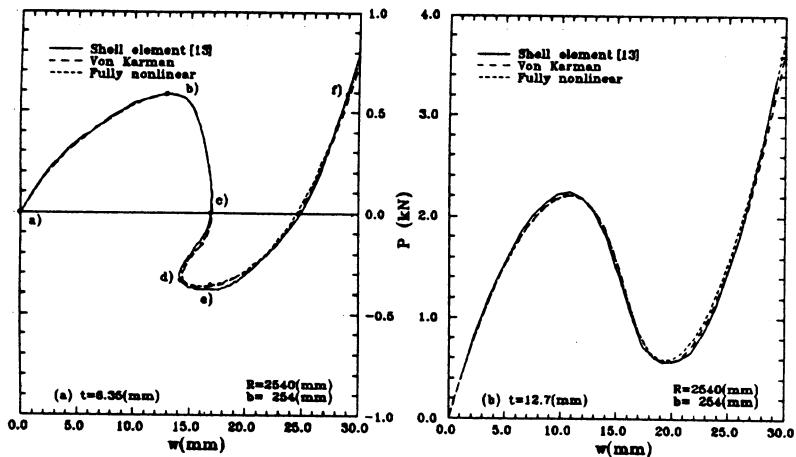


Fig. 3.2 Load-deflection curves of cylindrical shell roof.

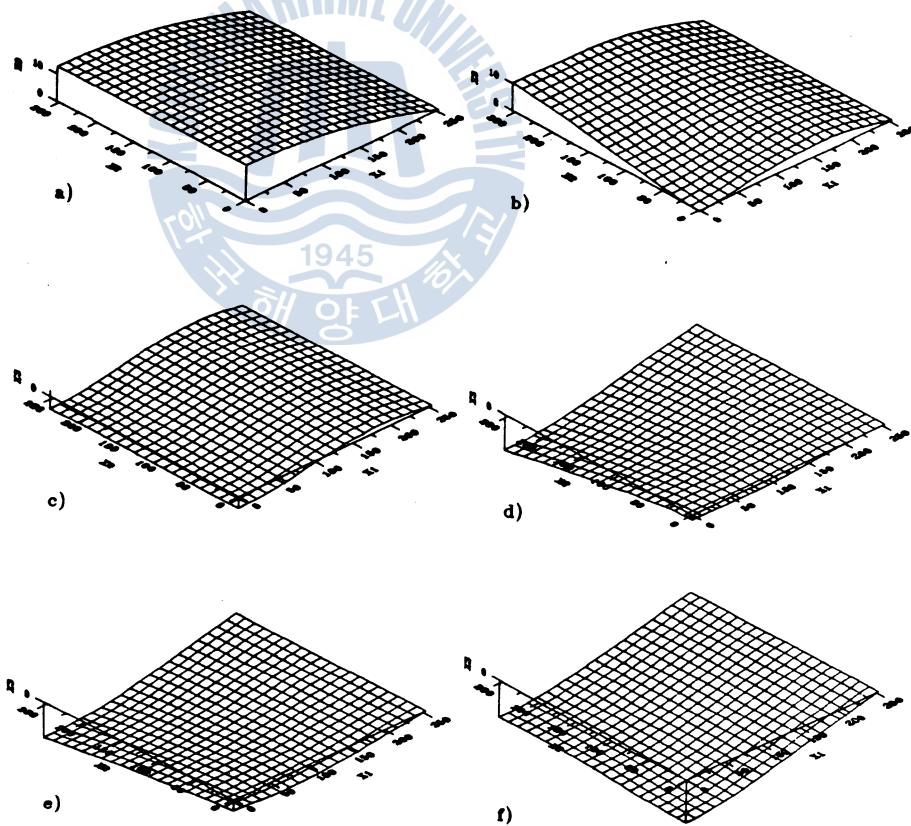


Fig. 3.3 Deformed shapes during snap-back phenomenon in Fig. 3.2(a).

각 경우에 대하여 수행하였다. 재료의 탄성계수(E)는 $200.0 kN/mm^2$ 이고 Poisson계수(ν)는 0.3 이다.

3.1.1 곡률 및 두께에 대한 영향(effect of curvature and thickness)

원통형 셀 지붕의 길이방향이 고정지지된 경우, 곡률 1/3000, 1/2500, 1/2000, 1/1500, 1/1250, 1/1000mm에 대하여 각각의 두께 변화에 대한 기하학적인 비선형 거동을 동시에 비교해 보기 위해 각 처짐에 대한 하중을 두께의 제곱으로 나눈 하중-변위 곡선을 Fig. 3.4에 나타내었다. 이와는 달리 두께 10, 25, 50, 100, 150, 200mm에 대하여 각각의 곡률에 대한 하중-변위 곡선을 Fig. 3.5에 나타내었다. 각 Figure들의 좌측에 있는 (a),(c),(e),(g),(i),(k)는 Von Karman 가정하의 정식화에 의한 결과들이고, 우측에 있는 (b),(d),(f),(h),(j),(l)은 완전 비선형에 의한 정식화에 따른 거동의 결과들이다. 그리고 각 경우들에 대한 극한하중(limit load)와 좌굴후 강도(post-buckling strength)들을 고유치 문제로 구할 수 있는 분기점 하중(bifurcation load)과 함께 Table 3.1에 요약하였다.

예상했던 바와같이 각 곡률에서 두께가 두꺼워질수록 극한하중은 증가하고 이들이 발생하는 처짐도 동

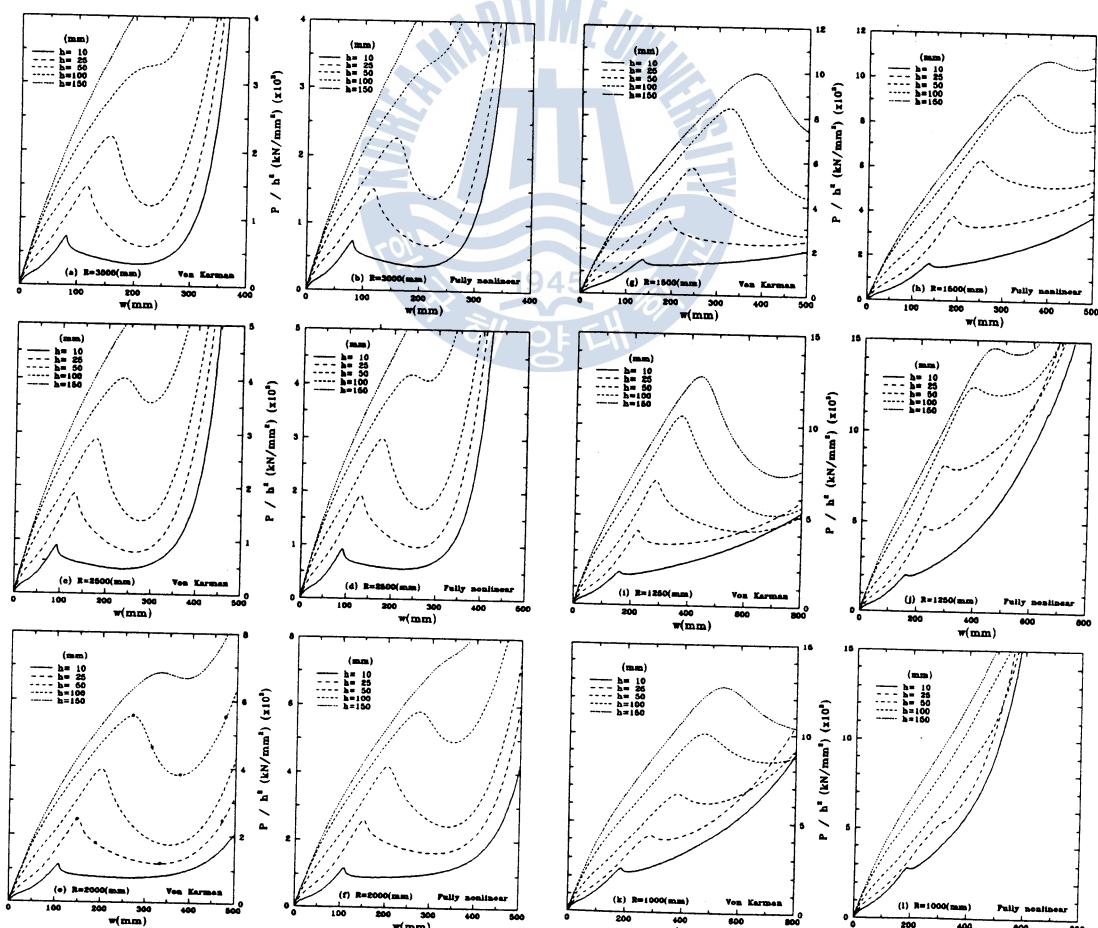


Fig. 3.4 (Cont.) Load-deflection curves corresponding to each curvature.

Fig. 3.4 Load-deflection curves corresponding to each curvature.

Table 3.1 Limit load and post-buckling strength of cylindrical shell roof.

t I/R		10(mm)	25(mm)	50(mm)	100(mm)	150(mm)	200(mm)
		Load(Def) kN mm					
1/3000 (1/mm)	BV*	5.66e1	8.78e2	8.12e3	7.83e4	2.88e5	7.39e5
	BF*	5.65e1	8.77e2	8.07e3	7.68e4	2.79e5	7.05e5
	LV*	7.32e1(81)	9.24e2(116)	5.52e3(157)	-	-	-
	LF*	7.44e1(81)	9.45e2(117)	5.64e3(157)	-	-	-
	PV*	3.18e1(206)	3.68e2(219)	3.01e3(228)	-	-	-
	PF*	3.65e1(201)	4.27e2(216)	3.45e3(223)	-	-	-
1/2500 (1/mm)	BV	6.97e1	1.03e3	9.20e3	8.70e4	3.18e5	7.89e5
	BF	6.97e1	1.02e3	9.15e3	8.53e4	3.07e5	7.50e5
	LV	9.02e1(92)	1.17e3(130)	7.22e3(175)	4.02e5(234)	-	-
	LF	9.23e1(92)	1.21e3(131)	7.48e3(176)	4.18e3(241)	-	-
	PV	4.65e1(238)	4.87e2(264)	3.42e3(276)	3.59e4(285)	-	-
	PF	5.60e1(224)	6.04e2(257)	4.23e3(269)	4.08e4(276)	-	-
1/2000 (1/mm)	BV	9.10e1	1.26e3	1.08e4	9.87e4	3.57e5	8.71e5
	BF	9.11e1	1.26e3	1.08e4	9.67e4	3.44e5	8.23e5
	LV	1.15e2(109)	1.55e3(151)	9.87e3(201)	5.53e4(268)	1.54e5(333)	-
	LF	1.19e2(109)	1.62e3(152)	1.04e4(203)	5.82e4(272)	-	-
	PV	7.64e1(258)	7.40e2(329)	4.29e3(354)	3.78e4(373)	1.50e5(384)	-
	PF	9.26e1(163)	1.03e3(306)	6.10e3(339)	4.93e4(348)	-	-
1/1500 (1/mm)	BV	1.31e2	1.68e3	1.36e4	1.17e5	4.11e5	9.82e5
	BF	1.31e2	1.68e3	1.35e4	1.15e5	3.95e5	9.26e5
	LV	1.53e2(135)	2.17e3(187)	1.42e4(243)	8.38e4(325)	2.24e5(383)	4.51e5(439)
	LF	1.64e2(137)	2.36e3(189)	1.58e4(249)	9.30e4(333)	2.43e5(397)	-
	PV	1.30e2(175)	1.43e3(395)	6.76e3(499)	4.30e4(533)	1.57e5(553)	4.07e5(571)
	PF	1.49e2(157)	2.06e3(241)	1.28e4(406)	7.64e4(467)	2.35e5(469)	-
1/1250 (1/mm)	BV	1.67e2	2.06e3	1.59e4	1.32e5	4.51e5	1.06e6
	BF	1.68e2	2.05e3	1.58e3	1.29e5	4.34e5	9.99e5
	LV	1.86e2(160)	2.60e3(222)	1.73e4(282)	1.05e5(369)	2.86e5(434)	5.68e5(488)
	LF	2.06e2(162)	2.97e3(225)	2.03e4(292)	1.25e5(390)	3.29e5(462)	-
	PV	1.71e2(185)	2.14e3(319)	1.05e4(594)	5.12e4(698)	1.63e5(726)	4.03e5(748)
	PF	2.01e2(173)	2.86e3(249)	1.97e4(333)	1.21e5(480)	3.22e5(540)	-
1/1000 (1/mm)	BV	2.20e2	2.65e3	1.96e4	1.55e5	5.11e5	1.16e6
	BF	2.21e2	2.64e3	1.95e4	1.52e5	4.93e5	1.10e6
	LV	2.46e2(185)	2.67e3(287)	1.65e4(382)	1.01e5(474)	2.5e5(538)	5.91e5(596)
	LF	2.83e2(188)	-	-	-	-	-
	PV	2.25e2(210)	2.52e3(335)	1.52e4(480)	8.49e4(700)	2.2e5(855)	4.84e5(959)
	PF	2.77e2(198)	-	-	-	-	-

BV* : Bifurcation Load by Von Karman

LV* : Limit Load by Von Karman

PV* : Post-buckling Strength by Von Karman

BF* : Bifurcation Load by Fully Nonlinear.

LF* : Limit Load by Fully Nonlinear.

PF* : Post-buckling Strength by Fully Nonlinear.

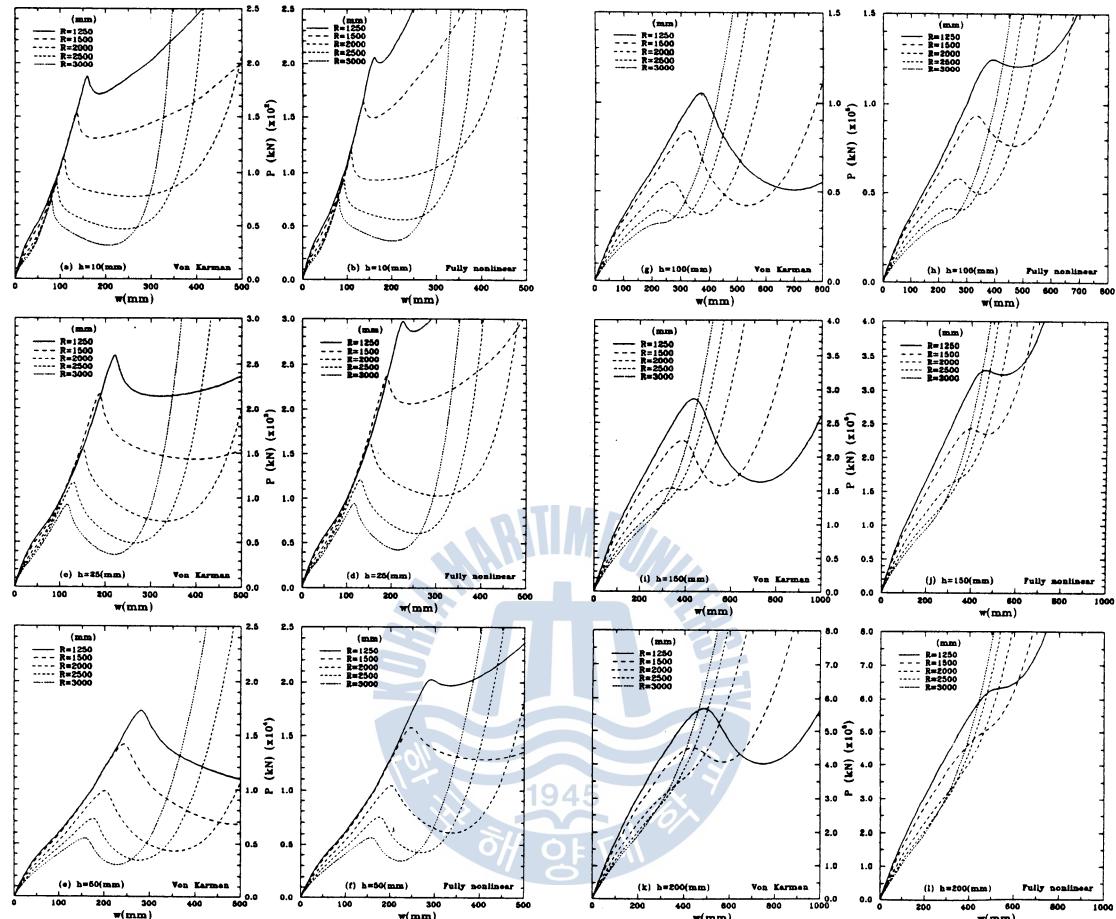


Fig. 3.5(Cont.) Load-deflection curves corresponding to each thickness.

Fig. 3.5 Load-deflection curves corresponding to each thickness.

시에 커지고 있음을 알 수 있다. Fig. 3.4의 Von Karman인 경우, 두께가 비교적 두꺼울 때는 곡률이 작을수록 snap-through현상이 나타나지 않고, 두께가 얕을 때는 곡률이 증가할수록 이 현상이 작게 그리고 짧게 일어나고 있음을 알 수 있다. 좌굴후 강도도 두께가 두꺼워질수록 증가하고 있지만 곡률이 아주 큰 경우를 제외하고는 각 곡률마다 비슷한 처짐에서 발생하고 있다.

Fig. 3.4의 Fully Nonlinear의 거동은 전체적으로는 Von Karman인 경우와 비슷하지만 곡률이 증가 할수록 극한하중과 좌굴후 강도가 상대적으로 증가하고, 곡률이 대체로 큰 경우에는 그러한 정도가 크고 snap-through현상도 잘 나타나지 않고 있다. 특히 좌굴후의 거동에도 큰 차이가 있는데, Von Karman 가정하의 정식화 과정에서 무시되는 고차항의 변형율 항들이 대변형 비선형 거동에 미치는 영향인 것으로 사료된다.

Fig. 3.5에서도 Von Karman과 Fully Nonlinear의 거동들을 서로 비교하기 위하여 같은 두께에 대하여 나란히 배치하였다. 전체적으로 각 두께에서 곡률이 커지면 그리고 두께가 두꺼워지면 극한하중과

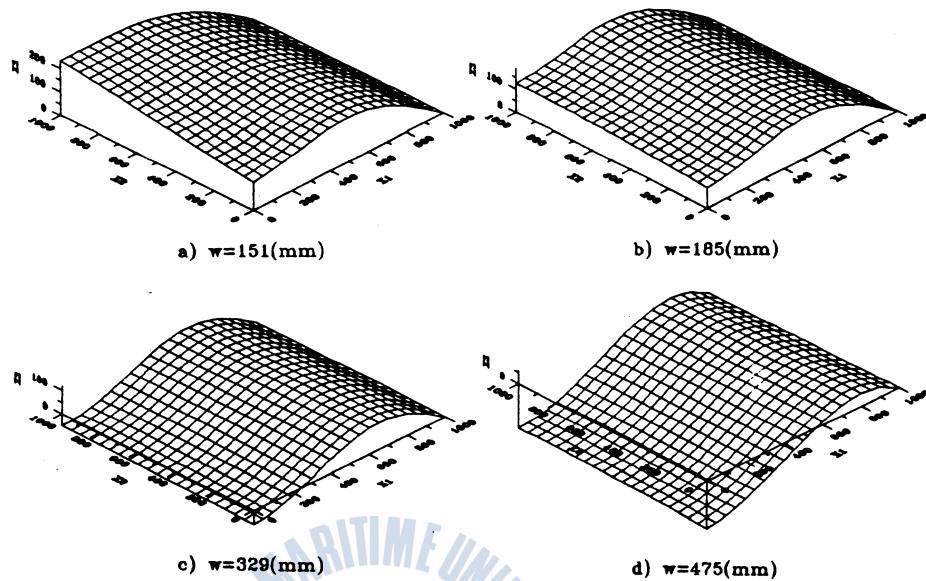


Fig. 3.6 Deformed shapes during snap-through phenomenon at $h = 25\text{mm}$.

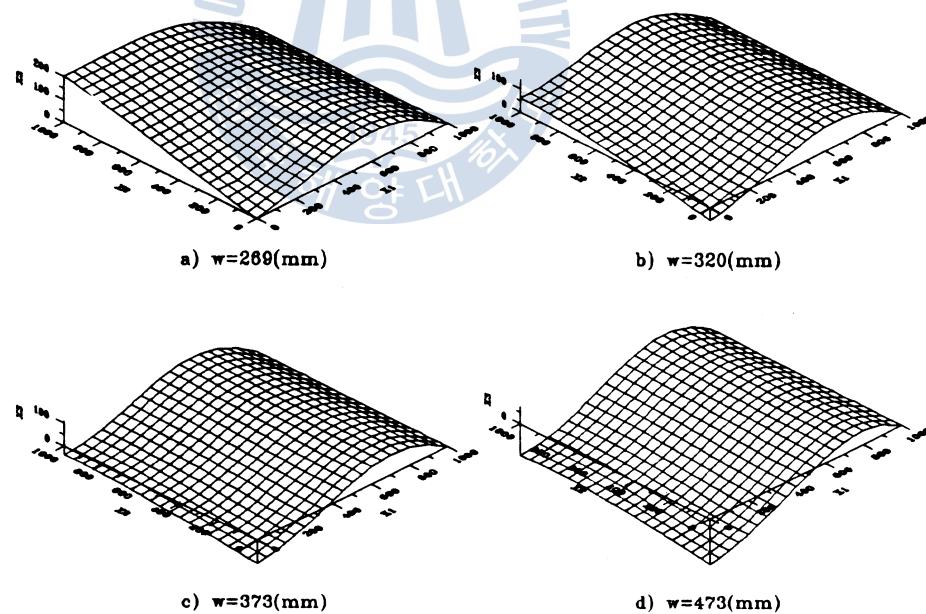


Fig. 3.7 Deformed shapes during snap-through phenomenon at $h = 100\text{mm}$.

좌굴후 강도는 증가하고, 두께가 작은 경우에는 곡률이 클수록 그리고 두께가 클 경우에는 곡률이 작아질 수록 snap-through현상이 잘 나타나지 않고 있다. 두께가 두꺼워질수록 그리고 Fully Nonlinear의 경우가 Von Karman의 경우보다 그 정도가 심하다.

앞에서 설명한 비선형 거동중에서 snap-through 현상을 가시화하기 위하여 곡률 $1/2000\text{mm}$ 인 경우

의 Fig. 3.4(c)의 • 기호로 표시된 두께 25와 100mm인 처짐 형상들을 극한점에서 좌굴후 과정을 거쳐 snap-through되는 과정을 각각 Fig. 3.6과 Fig. 3.7에 나타내었다. 두께가 대체로 얇은 경우는 웰 지붕의 중앙점 부근과 자유단이 대체로 평행하게 처짐이 일어난 것에 비하여, 두꺼운 경우는 자유단 부근의 처짐강성이 대체로 크게 작용하고 있음을 볼 수 있다.

3.1.2 지지조건에 대한 영향(effect of boundary condition)

원통형 웰 지붕의 길이 방향의 고정지지와 단순지지 조건에 따른 비선형 거동의 차이를 살펴보기 위하

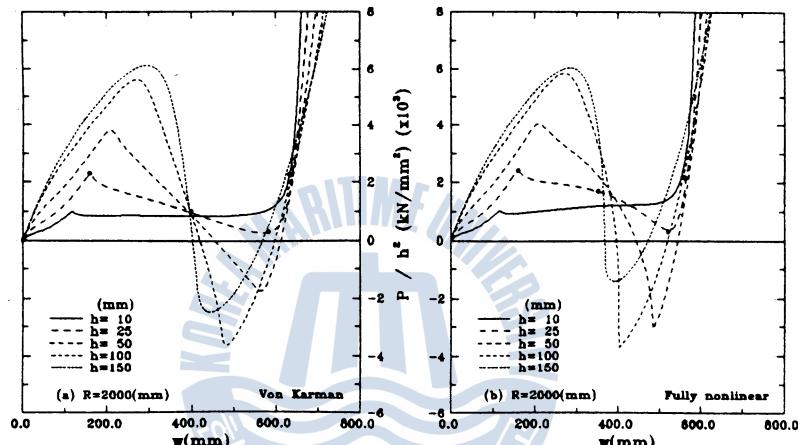


Fig. 3.8 Load-deflection curves corresponding with simply supported boundary.

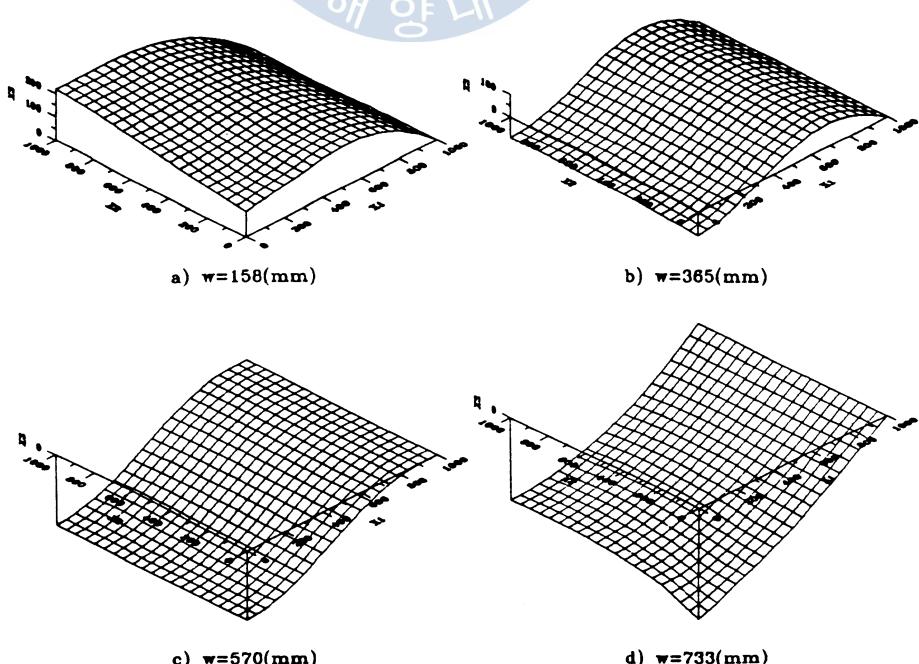


Fig. 3.9 Deformed shapes during snap-through phenomenon with simply supported boundary.

Table 3.2 Limit load and post-buckling strength with simply supported condition.

I/R (1/mm)	t	10(mm)	25(mm)	50(mm)	100(mm)	150(mm)	200(mm)
		Load(Def) kN mm					
1/2000 (1/mm)	BV	8.98e1	1.20e3	9.71e3	8.37e4	2.99e5	7.26e5
	BF	8.98e1	1.20e3	9.67e3	8.25e4	2.90e5	6.91e5
	LV	9.82e1(117)	1.40e3(158)	9.41e3(207)	5.57e4(270)	1.37e5(293)	2.42e5(290)
	LF	1.03e2(117)	1.48e3(160)	1.01e4(210)	5.83e4(274)	1.36e5(285)	2.31e5(274)
	PV	8.35e1(163)	1.58e2(570)	4.35e3(567)	3.63e4(483)	5.57e4(445)	2.73e4(452)
	PF	9.21e1(142)	2.18e2(524)	7.69e3(484)	3.69e4(403)	3.18e4(392)	3.21e4(403)

여. 곡률 1/2000mm에 각 두께에 따른 거동을 추적하여 보았다. 고정지지된 하중-변위곡선은 Fig. 3.4(e), (f)와 같고, 단순지지된 경우에는 Fig. 3.8(a), (b)에 나타내었다. 그리고 고정지지된 경우의 Table 3.1과 같이 단순지지된 경우에도 Table 3.2에 각 두께에 대한 극한하중, 좌굴후 강도 및 분기점 하중들을 요약하였다. 극한하중은 고정지지된 경우가 조금 크게, 비슷한 처짐에서 발생하지만 좌굴후의 거동은 매우 상이하다는 것을 알 수 있다. 단순지지된 경우의 좌굴후 강도는 두께가 25mm보다 더 두꺼우면 오히려 익을 가지게 됨을 볼 수 있고, Von Karman과 Fully Nonlinear의 두 경우는 비슷한 경향을 보이는 것을 알 수 있다.

두께 25mm일 때, 고정지지된 경우의 처짐 형상을 Fig. 3.6에 나타낸 것과 같이 단순지지된 경우에도 Fig 3.9에 나타내어 비교하였다. 극한점에서의 처짐형상은 비슷하지만, 단순지지된 경우의 좌굴후 처짐은 고정지지보다 매우 빨리 아래로 불록하게 처지는 형상을 보이고 있다. 이것은 길이 방향의 지지면에서의 회전이 자유롭기 때문일 것이다.

3.1.3 재료의 탄소성에 대한 영향(effect of material elastoplasticity)

곡률이 1/2000mm이고 길이 방향으로 고정지지된 원통형 셀 지붕에 재료의 탄소성을 고려하여 Fully Nonlinear로 해석한 하중-변위 곡선을 각 두께들에 대한 비교를 쉽게하기 위하여 하중을 두께의 제곱으로 나누어 Fig. 3.10(a)와 같이 나타내었다. 여기에서는 완전 소성재료(perfect plastic material)로 이 상화하고 항복응력($\sigma_0 = \kappa_0$ in Eq. (2.20))을 $340 N/mm^2$ 으로 정하였다. 그리고 극한하중과 좌굴후 강도도 각 두께에 대하여 요약하여 Table 3.4에 나타내었다. 탄성만 고려한 거동과 탄소성을 고려한 경우를 비교하기 위하여 대표적으로 두께 25mm인 경우에만 Fig. 3.10(b)에 나타내었다. Fig. 3.10(b)에서 볼 수 있는 바와같이 변형 초기에 셀 지붕의 일부분이 항복되기 시작하면서 강성이 급격히 저하되어 탄성만

Table 3.3 Limit load and post-buckling strength with material elastoplasticity.

I/R (1/mm)	t	10(mm)	25(mm)	50(mm)	100(mm)	150(mm)	200(mm)
		Load(Def) kN mm					
1/2000 (1/mm)	LF	6.36e1(106)	5.42e2(426)	1.83e3(445)	4.78e5(550)	8.23e3(590)	1.21e4(620)
	PF	2.53e1(190)	2.10e2(320)	1.47e3(585)	4.64e3(630)	8.12e3(650)	1.21e4(650)

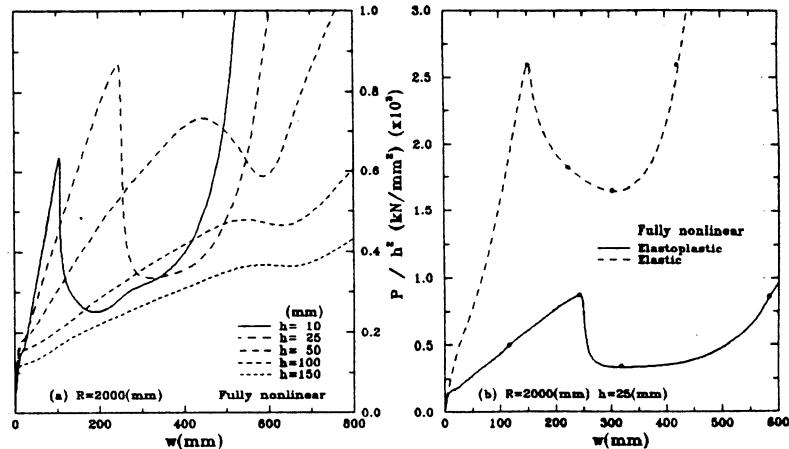


Fig. 3.10 Load-deflection curves corresponding with material elastoplasticity.

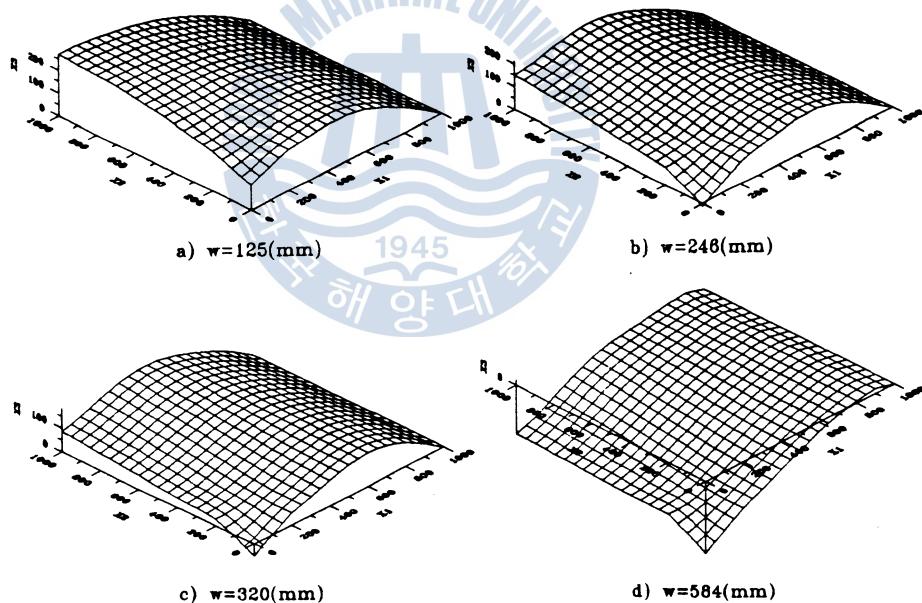


Fig. 3.11 Deformed shapes during snap-through phenomenon with material elastoplasticity.

Table 3.4 Critical buckling strength and ultimate strength of square plate under uniaxial compression.

λ	σ_E	σ_{cr}	σ_u	σ_E/σ_0	σ_{cr}/σ_0	σ_u/σ_0
5.0	3.47	3.38	7.33	0.145	0.141	0.305
4.0	5.43	5.29	9.42	0.226	0.220	0.393
3.0	9.62	9.37	12.95	0.401	0.390	0.540
2.5	13.86	13.50	16.10	0.578	0.563	0.671
2.0	21.65	21.08	21.63	0.902	0.878	0.901
1.8	26.72	23.87	23.87	1.113	0.995	0.995
1.5	38.45	23.97	23.97	1.602	0.999	0.999

고려한 거동과는 판이함을 알 수 있고 극한하중과 좌굴후 강도도 매우 낮음을 알 수 있다. 그리고 웰 지붕의 탄소성 거동을 극한점에서 snap-through되는 과정을 Fig. 3.11에 나타내었는데, 탄성거동인 Fig. 3.6과 비교하면 접중하중이 작용하는 부분의 소성화에 의한 강성의 감소로 인하여 큰 변형이 일어난다는 것을 쉽게 알 수 있다. 탄성만 고려했을 경우의 Fig. 3.4(f)와 Table 3.1(곡률 1/2000mm, 탄소성이 고려된 경우의 Fig. 3.10(a)와 Table 3.4를 비교하여 보면 전체적으로 극한하중과 좌굴후 강도에 현격한 차이를 발견할 수 있다. 탄성만 고려할 경우의 극한하중과 좌굴후 강도의 증가율이 두께의 두꺼워짐에 따라 한결같이 증가하는 데 비하여 탄소성을 고려할 경우에는 그렇지 않음을 알 수 있다.

3.2 1축 압축력 받는 정방형판(square plate under uniaxial compression)

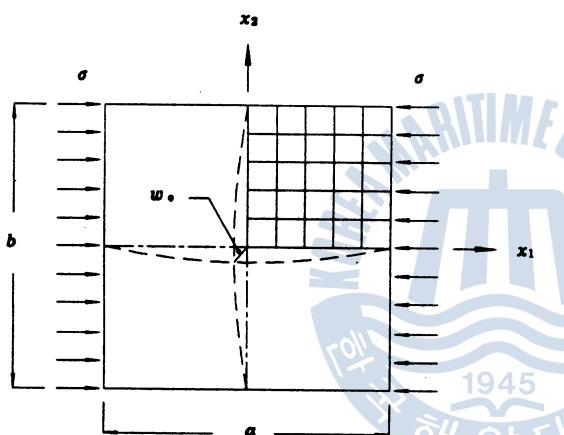


Fig. 3.12 Coordinate system of a simply supported square plate under uniaxial compression.

Fig. 3.12와 같은 초기치 짐($w_0/h=0.001$)을 가진 주변이 단순지지된 정방형판($a \times b = 500 \times 500\text{mm}$)이 1축 압축력을 받는 경우, 판 두께의 변화에 대한 탄소성 대변형 거동을 해석하였다. 본 해석에 사용된 재료상수는 $E=21.000\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $\sigma_0=24.0\text{kg/mm}^2$ 이고, Table 3, 4에 나타낸 바와 같이 7가지의 세장비($\lambda=b/t\sqrt{\sigma_0/E}$)를 고려하였다. 작용하중 및 주변지지 조건등의 대칭성을 고려하여 1/4반을 고려하고 5×5 요소로 분할하여 해석하였다. Fig. 3.13(d)에 나타낸 바와 같이 5×5 와 10×10 요소분할에 의한 해석결과는 극한강도를 지나고 나서 조류의 차이를 보이고 있

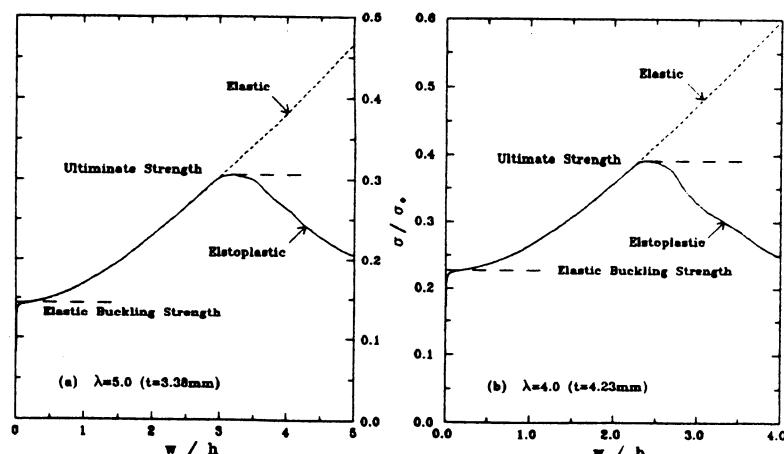


Fig. 3.13 (Cont.) Load-deflection curves of a simply supported square plate under uniaxial compression.

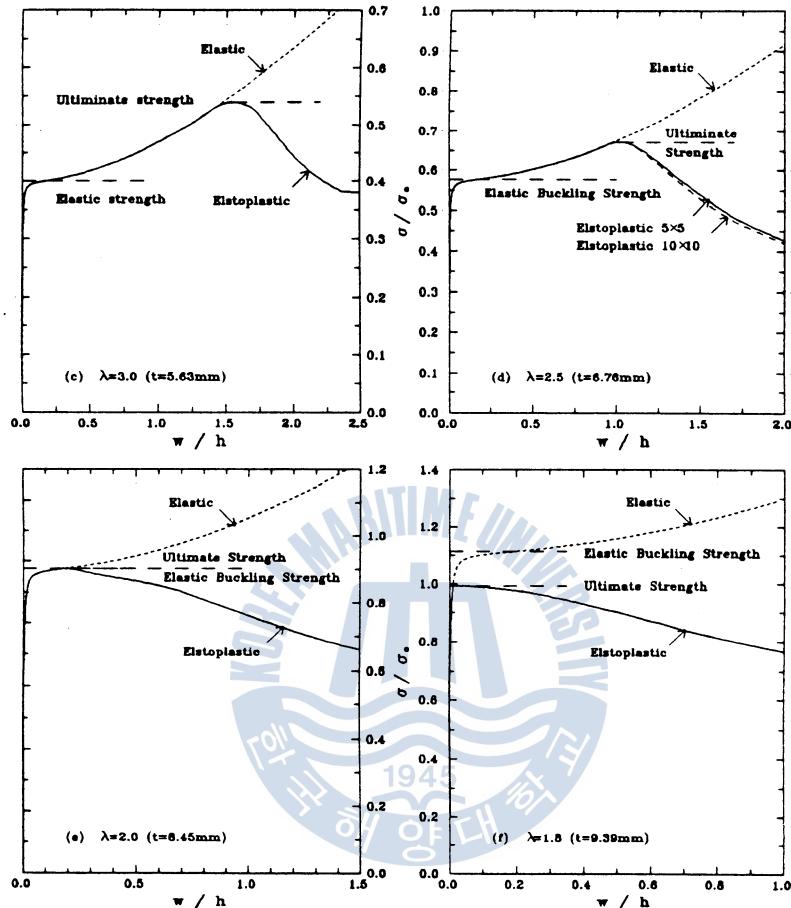


Fig. 3.13 Load-deflection curves of a simply supported square plate under uniaxial compression.

을 뿐 탄성범위내에서는 잘 일치하고 있으므로 5×5 요소로도 충분한 정도를 준다고 할 수 있다.

세장비 $\lambda = 5.0, 4.0, 3.0, 2.5, 2.0, 1.8, 1.5$ 에 대한 오일러(Euler)의 탄성 좌굴응력(Elastic buckling stress, σ_E), 임계좌굴응력(Critical buckling stress, σ_{cr}) 및 최종응력(Ultimate stress, σ_u)을 Table 3.4에, 그리고 이들중 세장비 $\lambda = 1.5$ 를 제외한 모든 세장비에 대한 탄성 및 탄소성 대변형 거동을 Fig. 3.13에 나타내었다. 여기에서 탄성좌굴응력은 일반공식이나 고유치 문제(eigenvalue problem)로서 구하였다는데 잘 일치하고 있다. 미소한 초기처짐으로 인하여 명확한 좌굴점이 잘 나타나지 않기 때문에 $P = w^2$ (P : 하중, w : 처짐)을 적용하여 임계좌굴응력을 추정하는데, Table 3.4와 Fig. 3.13(a),(b),(c),(d),(e)에서 알 수 있는 바와 같이 탄성범위내에서 좌굴이 발생하는 경우에는 탄성좌굴응력과 잘 일치하고 있다. 좌굴 후 하중-처짐곡선의 임계치를 극한응력으로 잡았는 데 보통 탄성거동과 탄소성거동과의 분기점의 직후에 나타나고 있고, 분기점에서 판의 일부분이 소성되기 시작한다.

Fig. 3.13(a),(b),(c),(d)는 $\lambda = 5.0, 4.0, 3.0, 2.5$ 인 비교적 얇은 판의 해석 결과로서 탄성범위내에서 임계좌굴응력이 탄성좌굴응력과 거의 일치하게 발생하고 있으며, 하중의 증가에 따라 탄성상태하에서 대

처짐이 일어나고 소성화의 진전과 더불어 면내강성이 저하되면서 최종강도에 도달하였다. 이때의 최종응력은 항복응력 σ_0 보다 대체로 작은 편이다. Fig. 3.13(e)는 약간 두꺼운 판($\lambda=2.0$)의 하중-처짐곡선으로서 탄성좌굴응력, 임계좌굴응력 및 최종응력이 일치하고 있으며, 판이 두껍기 때문에 탄성범위내에서는 처짐도 커지않다. Fig. 3.13(f)에서와 같이 세장비가 $\lambda=1.8$ 이상인 두꺼운 판이 되면 면내강성이 매우 크게되어 임계좌굴응력과 최종응력이 일치하고, 이들은 두께가 얇은 판들과는 달리 탄성좌굴응력보다 훨씬 작아지게 된다.

두께가 얇은 판($\lambda=5.0$)은 사각형판의 구석에 가까운 곳에서 소성이 발생하여 압축력을 받는 변의 경계를 따라 소성영역이 전파되고, 두께가 두꺼워질수록($\lambda=4.0, 3.0$) 구석에서 약간 떨어진 곳에서 소성이 발생하여 압축력을 받는 변의 방향으로 조금 넓은 폭을 유지하면서 소성영역이 확장된다. 세장비가 $\lambda=2.5$ 정도가 되면 소성영역은 중앙부까지 확장되나 압축력을 받지 않는 변의 주변은 탄성영역으로 계속 남아 있다. 이와는 반대로 두께가 더 두꺼워지면($\lambda=2.0$) 소성은 판의 중앙부에서 소성이 발생하여 압축력을 받지 않는 변으로 전파되고, 소성영역은 판의 구석부까지 더욱 확장되지만 압축력을 받는 변의 중앙부 주위는 탄성영역으로 남아있다. 세장비가 $\lambda=1.8$ 이상이 되면 소성은 판의 중앙부에서 발생하여 판 전체로 고르게 확장된다.

3.3 수치해석의 고찰

snap-through, snap-back 현상이 나타나는 기하학적인 비선형 문제를 유한회전 증분의 영향을 고려한 웰요소의 결과와 잘 일치하고 있는 것으로 보아, 이 연구에 사용되고 있는 기하학적인 비선형 판요소는 정도가 높다고 사료된다. 웰 구조물의 곡률이 커지거나 두께가 증가할 때에는 완전 비선형으로 정식화한 것과 Von Karman의 가정하에 정식화한 결과와의 거동에는 차이가 커짐을 발견하였는데, 이것은 정식화 과정에서 일반적으로 무시되는 고차항의 영향으로 생각되며 정도를 높이기 위하여 완전 비선형으로 정식화하는 것이 바람직한 것 같다. 그리고 재료의 탄소성을 고려함으로서 보다 현실적인 비선형 거동을 구할 수 있었으며, 대변형 문제의 해석에는 이러한 재료의 탄소성을 고려하는 것이 바람직하다. 응력성분(stress components)으로 정식화함으로서 응력분포를 국부적으로 정확하게 그리고 재료가 항복되어 가는 과정을 쉽게 추적할 수 있었고, 비선형 구성방정식에 사용한 일관된 반환사상연산(consistent return mapping algorithm)은 최대한 4~5번 정도의 반복과정을 가지는 큰 규모의 계산에 매우 적합한 효율적 연산방법이라 할 수 있다.

4. 결 론

선박 및 해양 구조물에 많이 사용되고 있는 판이나 웰(shell)부재들의 견조, 조립상 편연적으로 수반되는 초기처짐이나 부정(misalignment)등으로 인한 좌굴/봉괴등의 탄소성 대변형 거동 해석에, 이 연구에서 사용한 요소와 해석방법등이 매우 유용할 것으로 사료된다. 또한 견조, 조립상 나타날 수 있는 잔류응력의 영향도 응력성분으로 정식화되어 있으므로 쉽게 고려할 수 있을 것이다. 또한 해석의 높은 수압을 받

는 두꺼운 켈 구조물에는 전단위평을 정확하게 고려하고 있는 본 연구의 요소가 매우 적합할 것으로 사료되며, 보다 실질적인 구조물에의 적용이 요구된다.

참고문헌

- 1) Hughes, T.J.R., Cohen, M. and Haroun, M., "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," Nuclear Engng Design, Vol. 46, pp. 203 - 222, 1978.
- 2) Pica, A., Wood, R.D. and Hinton, E., "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin theory," Computers & Structures, Vol. 11, pp. 203 - 215, 1980.
- 3) Pica, A. and Wood, R.D., "Postbuckling behaviour of plates and shells using a mindlin shallow formulation," Computers & Structures, Vol. 12, pp. 759 - 768, 1980.
- 4) Hughes, T.J.R. and Cohen, M., "The Heterosis finite element for plate bending," Computers & Structures, Vol. 9, pp. 445 - 450, 1978.
- 5) 이 상갑, 최 원준, "두꺼운 판의 전단 Warping 영향에 대한 연구", 한국전산 구조공학회 학술발표회 논문집, 제5권 제2집, pp. 29 - 38, 1992.
- 6) Washizu, K., Variational methods in elasticity and plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
- 7) Pinsky, P.M., Taylor, R.L. and Pister, K.S., "Finite deformation of elastic beams," in Proceeding IUTAM Symp. on Variational Methods in Mechanics of Solids(S. Nemat - Nasser & K. Washizu, eds.) Pergmon Press, pp. 115 - 120, 1980.
- 8) Marsden, J.E. and Hughes, T.J.R., Mathematical foundations of elasticity, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- 9) Simo, J.C. and Taylor, R.L., "A consistent return mapping algorithm for plane stress elasto-plasticity", Report No. UCB/SESM - 85/04, Uni. of California, Berkeley, 1985.
- 10) Riks, E., "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J. Solids and Struct., Vol. 15, pp. 529 - 551, 1979.
- 11) Crisfield, M.A., "An arc-length method including line searchs and accelerations", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 1269 - 1289, 1983.
- 12) Ramm, E., "Riks/Wempner approach - An extension of the displacement control method in nonlinear analysis", in Recent advances in nonlinear computational mechanics, E Hinton et al. Eds., Pineridge, pp. 63 - 86, 1982.
- 13) 양 영태, "대변위와 대회전을 고려한 만곡된 켈 및 편심 보강평판의 기하학적 비선형 해석", 인하대학교, 박사학위 논문, 1992.

