



공학석사 학위논문

로그격자와 영역확장법을 이용한 탄성파 수치모델링의 계산효율 향상 연구

A study on the improvement of computational efficiency of seismic numerical modeling by using both logarithmic grid and expanding domain method



2016년 2월

한국해양대학교 대학원

해양에너지자원공학과

홍 보 람

공학석사 학위논문

로그격자와 영역확장법을 이용한 탄성파 수치모델링의 계산효율 향상 연구

A study on the improvement of computational efficiency of seismic numerical modeling by using both logarithmic grid and expanding domain method



2016년 2월

한국해양대학교 대학원

해양에너지자원공학과

홍 보 람



본 논문을 홍보람의 공학석사 학위논문으로 인준함.



2016년 01월 14일

한국해양대학교 대학원



List	of	Tables		iv
List	of	Figures	•••••	V
Abst	trac	:t		•Vi

21 탄성파모델링			
	2		Ũ
2.2 수치모델링의 효율	향상		
2.2.1 로그격자의 적	용 	••••••	
000 어어치기비시	7] 0	B	11
2.2.2 영역확상법의	식용 1945		$\downarrow \downarrow$

Ô

3. 수치모형실험

Collection

3.1 수치모형실험의 설계	14
3.2 알고리즘의 구성	17
3.2.1 로그격자의 적용	17
3.2.1.1 정확성 검증	20
3.2.1.2 효율 비교	23
3.2.2 영역확장법의 적용에 따른 효율 비교	23

4. 수치예제를 통한 알고리즘 적용가능성 분석

4.1	수중음향환경에서의	알고리즘	적용	••••••	30
-----	-----------	------	----	--------	----

5.	결	론	 38
간	사의	극	 40
םי	~~~	2	40
참	고문	헌	 41





List of Table





List of Figures

Fig. 1 The spatial and temporal varying in numerical modeling: from (a) to
(f) in sequence 6
Fig. 2 The concept between (a) linear grid and (b) logarithmic grid 8
Fig. 3 Numerical example of expanding domain method (Ryu et al., 2015) 13
Fig. 4 Flow chart of Numerical tests 14
Fig. 5 The procedure of proposed algorithm 16
Fig. 6 conceptual diagram of model-grid in logarithmic grid 17
Fig. 7 velocity model and source and receiver position: in the (a) linear grid
and (b) logarithmic grid
Fig. 8 Source wavelet(first derivative gaussian function) 21
Fig. 9 Verification results of proposed algorithm: in the (a) linear grid, (b)
logarithmic grid, and (c) normalization result 22
Fig. 10 Input velocity model (3D) 24
Fig. 11 Input velocity model (2D) 25
Fig. 12 The velocity model transformed by logarithmic grid (3D) 26
Fig. 13 The velocity model transformed by logarithmic grid (2D)26
Fig. 14 Snapshots of wavefield: (a) 0.09s, (b) 0.15s, and (c) 0.21s29
Fig. 15 Target model in the linear grid
Fig. 16 Target model in the logarithmic grid
Fig. 17 Snapshots for target model: (a) $0.6\mu s$, (b) $0.87\mu s$, (c) $0.9\mu s$, (d) 1.05
μs , and (e) $1.2\mu s$



A study on the improvement of computational efficiency of seismic numerical modeling by using both logarithmic grid and expanding domain method

Hong, Bo Ram

Department of Energy and Resources Engineering Graduate School of Korea Maritime and Ocean University

Abstract

Numerical modeling in seismic survey was performed to simulate wave propagation and to understand the behavior of seismic waves. Compared with seismic survey in field, it has no limits in space and time and can acquire data for various types of model in a short time. To perform numerical modeling, many numerical methods are introduced such as finite difference method(FDM), staggered-grid FDM, spectral element method, and finite element method. Especially, finite difference method is used widely among the various numerical methods. Because it is relatively easy to implement and can accurately simulate the wave propagation for complex model. However, it requires high performance computing resources. To overcome this limitation, more efficient algorithms are needed.

In this study, seismic numerical modeling algorithm was developed. To develop the algorithm, two techniques are applied in time domain. One is logarithmic grid, and the other is expanding domain method. In order to verify



the proposed algorithm, several numerical tests are conducted.

Based on numerical test results, reduction of the computation and memory usage is confirmed. Finally, this algorithm can be applied more efficiently to 3D numerical modeling in time domain.

KEY WORDS: Numerical modeling 수치모델링; Finite difference method 유한차분법; Computational efficiency 계산효율; Logarithmic grid 로그격자; Expanding domain method 영역확장법.





제1장 서론

탄성파탐사(seismic survey)는 자원개발 목적의 탐사에서 주로 이용되는 물리 탐사방법으로서, 탄성파의 다양한 거동 모사를 통해 지하매질을 영상화하는 기술이다(Kim et al., 2011). 탄성파탐사를 통해 취득된 자료들에 일련의 자료 처리과정을 수행함으로써 지하구조 영상을 획득할 수 있으며, 이를 이용하여 지하구조의 규명이 가능하다. 따라서 지하 내부구조에 대한 명확한 규명을 위해서는 기록된 탄성파 자료로부터 정확한 탄성파 거동의 모사가 필수적이다.

하지만 실제 탄성파 탐사를 통한 자료취득은 많은 시간과 비용을 필요로 하며, 탐사환경에 따라 양질의 자료를 취득하지 못하는 등 많은 어려움이 있다. 이때 지하매질에서의 탄성파 파동전파 모사를 통해 실제 자료로부터 얻을 수 있는 정보를 파악하기 위한 방법으로서 수치모델링(numerical modeling)을 이용할 수 있다. 탄성파탐사 분야에서 사용되는 수치모델링은 파동방정식을 기반으로 하여 매질에 따른 탄성파의 물리적 특성을 예측하는 방법으로, 실제 탐사와는 달리 시간 및 공간적 제약이 없으며 비교적 짧은 시간에 다양한 지질구조에 대한 자료취득이 가능하다(Etgen & O' Brien, 2007; Ramsden et al., 2005). 탄성파탐사 환경에서의 수치모델링을 위한 알고리즘으로 유한차분법(finite difference method, FDM), 엇격자 유한차분법(staggered-grid FDM), 스펙트랄 요소법 (spectral element method, SEM), 유한요소법(finite element method, FEM) 등 다양한 방법들이 개발되었다. 특히 유한차분법은 비교적 알고리즘의 구현이 간단하고 복잡한 모델에 대해서도 정확한 거동의 모사가 가능하여 널리 이용되고 있다(Liu & Sen, 2009; Kindelan et al., 1990). 하지만 이러한 방법들은 여전히 대용량의 컴퓨터 리소스와 계산시간을 필요로 하여 계산상의 효율이 떨어지며, 3차원으로의 확장에서 큰 어려움을 지니고 있다.

특히 국내의 경우, 대용량의 탐사 자료처리가 가능한 슈퍼컴퓨터 시스템을

Collection

- 1 -

갖춘 연구기관이 극히 드물며, 고가의 소프트웨어 및 고성능 시스템이 구축된 일부기관 또는 용역기관에 자료처리를 의존하고 있는 실정이다(Ji & Choi, 2010). 이와 같은 환경에서 효율적인 수치모델링 알고리즘의 필요성은 계속 증가하고 있으며, 높은 계산효율을 갖는 알고리즘은 부족한 고성능 컴퓨터시스템 구축의 한계를 극복할 수 있을 뿐만 아니라 저사양의 개인용 컴퓨터(PC)에서의 자료처리를 가능하게 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 유한차분법을 이용한 3차원 음향파동방정식 수치모델링의 효율 향상을 위하여 Ha and Shin(2012)에 의해 제안된 로그격자(logarithmic grid)와 Suh and Wang(2011)에 의해 제안된 영역확장법을 복합 활용한 알고리 즘을 제안하였다. 기존 유한차분법을 이용한 수치모델링의 정확성을 유지하면 서도 보다 효율적으로 탄성파 파동을 모사할 수 있는 알고리즘을 개발하기 위하여, 기 제안된 효율향상 방법의 복합활용을 시도하였다. 로그격자를 통해 연산량을 감소시켜 연산 시 필요한 메모리의 사용량을 줄이고, 영역확장법을 통해 계산시간을 감소시킴으로써 수치모델링의 효율을 향상시키고자 하였다. 기존의 등격자 유한차분법을 통한 수치모델링 결과와 로그격자를 이용한 수치 모델링 결과를 비교함으로써 알고리즘의 정확도를 검증하였으며, 여러 가지 수치예제를 통해 새롭게 개발된 알고리즘에 대한 효율성을 검증하였다.





제 2 장 연구이론

2.1 탄성파 모델링

자연적인 현상을 예측하거나 공학적인 문제를 해결하는데 있어 변수들의 물리적 관계는 미분방정식(differential equation)으로서 표현 가능하다. 미분방정 식의 해를 구함으로써 물리적 현상을 해석할 수 있는데, 이러한 해결방법에는 ① 해석적 방법(analytical method)과 ② 실험적 방법(experimental method), ③ 수치해석적 방법(numerical method)이 있다(최종근, 2010; Awrejcewicz, 2011; Mossberg, 2008). Table 1은 각 방법에 대한 비교이다.

Table 1 Comparison of analytical, experimental and numerical method

sort	analytical	experimental	numerical
solving method	direct solution	repetitive experiments	computing
accuracy	\uparrow	specifically ↑	relatively ↑
applicability	\downarrow	\downarrow	\uparrow

① 해석적 방법

d Collection

해석적 방법은 지배방정식을 수학적으로 직접 풀어 해를 구하는 방법으로 주어진 문제와 조건들이 간단하거나 문제에 대한 가정과 지배방정식이 정확할 때에는 쉽게 해를 얻을 수 있다. 하지만 대부분의 경우, 고려해야 하는 변수가 많거나 적용대상의 불규칙함에 기인한 복잡성과 비선형성으로 인해 적용에 한계가 있다.



② 실험적 방법

실험적 방법은 문제와 유사한 환경을 구성하여 실제적인 현상을 관찰 또는 측정하는 방법이다. 실험이 계획에 따라 원활하게 수행된다면 여러 번의 수행을 통해 비교적 신뢰도가 높은 결과를 얻을 수 있지만, 변수(variable)가 많은 경우 완벽한 변수통제가 이루어지기 어려워 신뢰도가 감소한다.

③ 수치해석적 방법

d Collection

수치해석적 방법은 미분식을 차분식으로 변환하여 컴퓨터를 통해 근사해를 구하는 것으로 복잡한 계산을 요구하거나 일련의 과정을 반복적으로 수행하는 다양한 분야에서 폭넓게 사용되고 있다. 특히 수학적으로 확립된 수식과 논리성· 정확성이 증명된 알고리즘을 기반으로 수행되어지기 때문에 결과의 신뢰성이 보장되어 다양한 산업분야에서 합리적인 의사결정의 도구로서 매우 유용하다.

탄성파 모델링에서 사용되는 대표적인 편미분방정식으로 파동방정식(wave equation)을 들 수 있으며, 파동방정식의 해를 계산함으로써 매질을 따라 전파 되는 탄성파의 거동을 이해할 수 있다. 파동방정식은 고려하는 변수에 따라 탄성 파동방정식(elastic wave equation)과 음향파동방정식(acoustic wave equation)으로 나뉘지만, 본 연구에서는 비교적 단순한 음향파동방정식을 이용하였다.

음향매질(acoustic media)에서의 3차원 파동방정식은 식 (1)과 같다.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(t)\delta(x - x_{0,y} - y_0, z - z_0)$$
(1)

이때 c는 매질의 속도, u는 파동장, t는 시간, x, y, z는 공간의 변수를 나타내 며, f는 음원의 파형, δ는 델타함수, x₀, y₀, z₀는 음원의 공간위치를 나타낸다.

유한차분법(finite difference method)은 위의 식 (1)과 같은 미분방정식을 차분방정식으로 근사시켜 해를 구하는 수치해석 방법으로, 미분방정식을 풀기 위한 가장 오래되고 간단한 방법 중 하나이다. 대표적인 근사방법에는 테일러



급수 전개(Taylor series expansion)를 이용한 근사가 있다. 테일러급수는 미분 가능한 어떤 함수를 다항식의 형태로 근사화하며, 미분 가능한 함수 *f*를 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots$$
(2)

그러나 실제 계산과정에서는 식 (2)와 같은 형태의 무한한 급수 연산을 직접 수행할 수 없다. 따라서 일정 차수 이하의 항들을 절단하고, 이로부터 발생하는 오차를 절단오차(truncation error)로 정의하여 식 (3)과 같이 근사한다.

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + truncation \ error$$

(3)

1차 또는 2차 이상의 항을 절단하고 정리하면 함수 *f*에 대한 1계 미분 및 2계 미분에 대한 근사된 차분방정식을 얻을 수 있다. 차분 시 사용하는 이산화함수에 따라 전향차분(forward difference), 중앙차분(centered difference), 후향차분 (backward difference)으로 나눌 수 있으며, 식 (4)는 1계 미분에 대한 전향차분 근사식, 식 (5)는 2계 미분에 대한 중앙차분 근사식이다. 이때 △*x*는 영역에서 두 점 사이의 간격을 의미한다.

1945

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$
(5)



테일러전개를 통한 유한차분법을 1차원 파동방정식 식 (6)에 적용하면 유한한 차분방정식의 형태로 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다. 이때 Δ*x*는 공간적 변화, Δ*t*는 시간적 변화를 나타낸다.

$$\frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} = \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} + f(t)\delta(x - x_{0})$$

$$\frac{1}{c^{2}} \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^{2}} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^{2}}$$
(6)
$$\frac{1}{c^{2}} \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^{2}} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^{2}}$$
(7)

Fig. 1은 유한차분법을 이용한 수치모델링의 알고리즘 개념도이다.



Fig. 1 The spatial and temporal varying in numerical modeling: from (a) to (f) in sequence



Fig. 1(a)를 기준으로 A2는 과거(t-Δt), B1, B2, B3는 현재(t), C2는 미래 (t+Δt)를 나타낸다. 따라서 십자모양의 좌우이동은 공간적 변화를 나타내며, 상하이동은 시간적 변화를 나타낸다. 즉, 시간에 따른 파동장의 변화를 파악하기 위해 식 (7)에서 미래의 시간을 나타내는 u(t+Δt)에 대해 정리하고 공간 및 시간적 변화의 반복적인 과정을 통해 근사값을 구하게 된다.

파동방정식 기반의 수치모델링 방법에서 유한차분법을 이용할 때에는 입력값인 속도모델을 격자구조로 표현해야 한다. 기존의 등격자 유한차분법에서는 파동 전파의 일정한 정확도 수준을 유지하고자 분산분석(dispersion analysis)을 수행 함으로써 적절한 격자간격을 선정한다. 분산분석을 수행하기 위해서는 먼저 식 (8)을 통해 최소파장의 크기 λ_{min}을 구한다. 이때 v_{min}은 매질의 최저속도이며, f_{max}는 음원의 최대주파수를 나타낸다.



 $\lambda_{\min} = v_{\min}/f_{\max}$

Collection

(8)

격자간격 Δgrid는 식 (8)을 통해 구한 수치모델링 시 고려되는 최소파장의 크기 λ_{min}을, 식 (9)와 같이 일정 수준의 정확도를 유지시켜주는 최소 격자수 G로 나누어줌으로써 구할 수 있다.

$$\Delta grid = \lambda_{\min} / G \tag{9}$$

식 (8)과 식 (9)의 관계에 따라 음원의 최대 주파수가 높아질수록 최소파장의 크기가 작아지며, 동일한 수준의 정확도를 유지하기 위해서는 격자간격이 조밀 해진다. 수치모델링에서 격자간격이 조밀해질수록 동일한 크기의 모델을 나타 내기 위한 총 격자수는 증가하며, 이는 연산량의 증가를 의미한다. 반복연산을 통해 해를 구하는 유한차분법에서 연산량의 증가는 연산시간을 증가시킬 뿐만 아니라 대용량의 저장장치와 고성능의 컴퓨터 리소스를 요구하게 된다.



2.2 수치모델링의 효율 향상

2.2.1 로그격자의 적용

유한차분법 등 다양한 수치해석적 방법을 통해 수행되는 수치모델링은 컴퓨 터의 성능에 따라 연산 수행의 제약이 존재한다. 실제 매질과 같이 무한한 영역에 대한 연산 수행이 불가능하기 때문에 인위적으로 영역의 경계를 설정하게 되며, 이는 모델링 과정에서 마치 실제로 존재하는 경계와 같이 인식되어 반사파 등의 원치 않는 물리적 현상을 야기한다. Ha and Shin (2012)에 의해 제안된 로그격자는 이러한 경계조건에 의한 영역을 제거하기 위한 방법으로서, 대수적 으로 증가하는 격자간격을 통해 파동이 기록시간 내에 영역의 끝에 도달하지 않도록 모델의 크기를 충분히 크게 만드는 방법이다. 또한 대수적으로 증가하는 격자간격으로 인해 등격자에 비해 더욱 적은 격자수로 동일한 거리를 표현할 수 있어, 모델링에 필요한 연산량을 감소시킬 수 있다. Fig. 2는 등격자와 로그 격자를 이용하여 동일한 크기의 모델을 나타낸 예시이다. 등격자를 이용할 경우 7×7×7=343개의 격자가 필요하다. 모델의 *x*축을 중심으로 양방향 로그 격자를 적용하였을 땐, 5×7×7=245개로 약 100개의 격자수가 감소하였다.



Fig. 2 The concept between (a) linear grid and (b) logarithmic grid



로그격자를 이용한 수치모델링은 파동이 로그함수로 구성된 새로운 함수를 따라 전파된다고 가정하고, 파동방정식을 재정의함으로써 수행된다. 기존의 선행연구로서 Ha and Shin (2012)은 라플라스 영역에서 깊이 방향에 대해 로그 격자를 적용하였으며 Choi et al. (2014)은 주파수 영역에서 적용하였으나, 본 연구에서는 시간영역에서 로그격자를 적용하고자 하였다.

먼저 1차원 음향 파동방정식에서 공간에 대한 변수 *x*가 새로운 함수 X = f(x)를 따라 전파된다고 가정하면, 파동방정식은 다음의 식 (10)과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial x^2} + f(t)\delta(X - X_0)$$
(10)

식 (10)의 우변에 위치한 x에 대한 이차미분항을 근사하기 수월한 형태로 풀어쓰면 식 (11)과 같다. 음원항은 미분과 관련 없으므로 표기 생략하였다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(X,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(X,t)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right)^{-1945} = \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial X^2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u(X,t)}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$
(11)

1차원에서 공간의 변수 *x*에 대해 자연로그 함수 *X*로 정의하면 식 (12)와 같이 *x* ≥ 0일 때와 *x* < 0일 때로 나누어 표현할 수 있다.

$$X = \begin{cases} \ln(x+1), & x \ge 0\\ -\ln(-x+1), & x < 0 \end{cases}$$
(12)



Collection

이때 식 (13)을 통해, x ≥ 0인 경우 x+1=e^X, x < 0인 경우 -x+1=e^{-X}의 관계식을 얻을 수 있다. 이를 이용하여 x ≥ 0일 때, 일차미분 및 이차미분항에 대해 간단히 정리하면 각각 식 (13) 및 식 (14)와 같다.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left\{ \ln\left(x+1\right) \right\}' = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{e^X}, \qquad \qquad \therefore \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{e^{2X}} \tag{13}$$

 $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{e^X} \right) = -\frac{1}{e^{2X}}, \qquad \qquad \therefore \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{e^{2X}}$ (14)

따라서 식 (10)은 식 (13)과 식 (14)를 이용하여 식 (15)와 같이 표현할 수 있으며, 식 (15)를 유한차분법을 통해 차분식으로 근사하면 식 (16)과 같다.

$$\frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2} u(X,t)}{\partial t^{2}} = \frac{\partial^{2} u(X,t)}{\partial X^{2}} \frac{1}{e^{2X}} \frac{\partial u(X,t)}{\partial X} \frac{1}{e^{2X}}$$

$$\frac{1}{c^{2}} \frac{u(X,t-dt) - 2u(X,t) + u(X,t+dt)}{dt^{2}} \frac{1}{e^{2X}} \frac{u(X,t) - 2u(X,t) + u(X,t+dt)}{dt^{2}} \frac{1}{e^{2X}} \frac{u(X,t) - u(X-dX,t)}{dX} \frac{1}{e^{2X}}$$
(15)
(15)

이를 보다 간단하게 표현하기 위하여 시간적 변화를 나타내는 *dt*에 대해 첨자를 이용하여 식 (17)과 같이 정의하면, 식 (18)의 형태로 단순화할 수 있다.

$$\begin{cases} u_1(X) = u(X, t - dt) \\ u_2(X) = u(X, t) \\ u_3(X) = u(X, t + dt) \end{cases},$$
(17)



$$\frac{\frac{1}{c^{2}} \frac{u_{1}(X) - 2u_{2}(X) + u_{3}(X)}{dt^{2}}}{\frac{u_{2}(X - dX) - 2u_{2}(X) + u_{2}(X + dX)}{dX^{2}} \frac{1}{e^{2X}} - \frac{u_{2}(X) - u_{2}(X - dX)}{dX} \frac{1}{e^{2X}}$$
(18)

x < 0인 경우에도 일차미분 및 이차미분항을 정리하면 식 (19) 및 식 (20)과 같으며, 동일한 방법으로 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \{-\ln(-x+1)\}' = -\frac{-1}{-x+1} = e^X, \qquad \therefore \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 = e^{2X}$$
(19)
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^X) = e^X \frac{\partial X}{\partial x} = e^{2X}, \qquad \therefore \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = e^{2X}$$
(20)

$$\frac{\frac{1}{c^2} \frac{u_1(X) - 2u_2(X) + u_3(X)}{dt^2}}{\frac{u_2(X - dX) - 2u_2(X) + u_2(X + dX)}{dX^2} e^{2X} + \frac{u_2(X) - u_2(X - dX)}{dX} e^{2X}}$$
(21)

3차원에 대해서도 공간에 대한 변수 y, z에 대해 각각 새로운 자연로그 함수 Y, Z를 정의할 수 있으며, 일차미분 및 이차미분항을 동일한 방법으로 정리함 으로써 파동방정식을 재정의할 수 있다.

2.2.2 영역확장법의 적용

d Collection

파동은 음원의 발생지점으로부터 시작되어 매질을 따라 구형으로 발산된다. 이때 음원으로부터 먼 곳에 위치한 지점에서는 파동이 도달하기 전까지는 파동 장의 변화가 나타나지 않는다. 영역확장법(expanding domain method)은 이와 같이 파동전파가 아직 진행되지 않은, 즉 파동장의 변화가 없는 예측 가능한 영역에 대한 연산을 생략함으로써 연산 효율을 높이는 방법으로, 이를 통해 계산 비용을 줄일 수 있다. 영역확장법을 적용하기 위해서는 파동장의 변화가 나타 나지 않는 영역(zero 영역)을 파악해야 한다. 이때 역으로 파동장의 변화가 나타나는 non-zero 영역의 범위를 계산함으로써 대상이 되는 영역을 확인할 수 있다. 파동전파의 확장속도를 통해 non-zero 영역을 계산하는 방식으로 ① 등 속도 방법(constant velocity method), ② 아이코널 방정식 풀이법(eikonal equation solver), ③ 진폭 비교방법(amplitude comparison)이 있으며, 그 특징은 다음과 같다(Suh & Wang, 2011; Ryu et al., 2015).

① 등속도 방법

등속도 방법은 속도변화에 관계없이 모델이 갖는 최대속도에 대한 주시를 이용하여 파동장의 확장속도를 구한다. 속도변화에 대한 고려를 하지 않고 고정된 최대속도로 연산영역을 확장하기 때문에 복잡한 속도정보를 갖는 모델에 대해서는 비효율적이다.

② 아이코널 방정식 풀이법

아이코널 방정식 풀이법은 주시를 계산하는 고전적인 방법으로(Vidale, 1990) 정확성이 매우 높은 반면, 아이코널 방정식을 풀기 위한 계산 자체가 복잡하고 연산량이 많아 효율 향상 면에서는 다소 부족하다.

1945

③ 진폭 비교방법

진폭 비교방법은 속도변화에 따라 파동이 전파되면서 발생하는 진폭의 차이를 통해 확장속도를 결정하는 방법이다. 비교적 계산이 간단하며, 위 두 방법과 달리 주시를 계산하는 것이 아니라 영역의 경계를 계산함으로써 확장시킨다.

Ryu et al. (2015)의 연구결과인 Fig. 3을 통해 살펴보면, 실선과 파선은 각각 연산영역의 확장속도가 느린 경우와 빠른 경우를 나타낸다. 확장속도가 상대적 으로 느린 경우, 파동의 전파속도와 거의 유사하게 연산영역이 확장되므로



파동장의 변화가 나타나지 않는 불필요 영역에 대한 연산이 더욱 적어 효율적 이다. 따라서 영역확장법을 적용함에 있어, 적절한 확장속도의 선정이 매우 중요함을 알 수 있다.



Fig. 3 Numerical example of expanding domain method (Ryu et al., 2015)





제 3 장 수치모형실험

3.1 수치모형실험의 설계

본 연구에서는 유한차분법을 이용한 수치모델링의 계산효율을 높이고자 로그 격자와 영역확장법을 복합활용한 알고리즘을 개발하고자 하였다. 로그격자를 적용함으로써 계산에 필요한 격자수를 줄여 연산량 효율을 향상시키고자 하였 으며, 영역확장법을 통해 계산시간을 단축하고자 하였다. 알고리즘의 개발을 위해 수행한 수치모형실험의 과정은 Fig. 4와 같다.



Fig. 4 Flow chart of Numerical tests



먼저 음향파동방정식에 기초한 유한차분법 수치모델링 알고리즘에 로그격자를 적용하였다. 로그격자에 대한 정확성 및 타당성 검증을 위해 기존의 유한차분 법을 이용한 수치모델링 결과와의 비교를 수행하였으며, 로그격자를 통한 계산 량의 효율을 확인하였다. 이후 검증 및 효율 비교를 완료한 로그격자를 적용한 알고리즘에 대해 계산시간의 효율을 높이기 위해 영역확장법을 적용하였다. 영역확장법을 통한 효율성은 적용 유무에 따른 계산시간의 비교를 통해 확인하 였다.

제안하는 알고리즘의 적용가능성 분석을 위하여 수중음향 환경에서의 수치 모형실험을 수행하였다. 수층 내부에 존재하는 표적탐지를 위해 고주파수 대역의 음원을 사용하는 수중음향 환경에서 수치모형실험을 수행하였다.

제안 알고리즘의 흐름도는 Fig. 5와 같다. 가장 먼저 수치모델링을 위한 속도 모델, 격자간격, 기록시간 등 다양한 모델링 변수들을 입력받는다. 이때 속도 모델은 등격자로서 입력되어 등격자에 대한 격자개수, 격자간격 뿐만 아니라 로그격자의 적용을 위한 격자개수, 격자간격을 함께 입력한다. 입력된 변수들을 이용하여 로그함수를 통해 등격자의 속도모델을 로그격자로 변환함으로써 새로운 속도모델을 생성한다.

음원의 위치를 중심으로 일정 범위에 대해 초기영역을 설정하고, 일반적인 유한차분법과 동일하게 시간간격에 대한 반복 연산과정으로 수행하게 된다. 연산과정에서 가장 먼저 영역확장 여부를 확인하며, 기준이 되는 경계에서 파동장의 변화가 특정수준 이상으로 나타날 경우 사용자가 정한 격자수만큼 확장한다. 확장된 영역 내에서만 유한차분 연산을 수행하며, 반복된 확장을 통해 확장영역의 경계가 초기의 속도모델 영역의 경계와 일치하면 경계조건을 적용하게 된다. 입력된 기록시간까지 위의 과정들을 반복한 후, 알고리즘이 종료된다.

Collection



Fig. 5 The procedure of proposed algorithm



3.2 알고리즘의 구성

3.2.1 로그격자의 적용

로그격자는 입력되는 속도모델의 최상부가 지표 또는 수층일 것으로 가정하여 Fig. 6과 같은 형태로 설계하였다. *z*축은 깊이방향을 양의 값으로 갖는 단방향의 로그격자를 적용하였으며, *x*축 및 *y*축은 입력모델 *xy*평면의 중심(0, zero)을 기준으로 양방향(+, -)으로 증가하는 로그격자를 적용하였다. 이에 따라 격자 부호에 따른 경우의 수는 4가지이며, 각 경우에 알맞은 수식들로 파동장 계산 과정을 구성하였다.



Fig. 6 conceptual diagram of model-grid in logarithmic grid



식 (18)을 이용하여 시간적 변화에 대한 항을 간단하게 나타낸 3차원 음향 파동방정식은 식 (22)와 같다.

$$\frac{1}{c^{2}} \frac{u_{1}(X, Y, Z) - 2u_{2}(X, Y, Z) + u_{3}(X, Y, Z)}{dt^{2}} = \frac{\partial^{2}u_{2}(X, Y, Z)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}(X, Y, Z)}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}(X, Y, Z)}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{2}(X, Y, Z)}{\partial z^{2}}$$
(22)

로그격자의 부호에 따라 4가지 경우로 나누었을 때, 식 (22)의 공간에 대한 변수를 식 (23) ~ 식 (26)과 같이 정리하여 알고리즘을 구성하였다.

$$\begin{aligned} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 ; \\ \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{u_2(X - dX, Y, Z) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X + dX, Y, Z)}{dX} \frac{1}{e^{2X}} \\ &- \frac{u_2(X, Y, Z) - u_2(X - dX, Y, Z)}{dX} \frac{1}{e^{2X}} \\ &+ \frac{u_2(X, Y - dY, Z) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X, Y + dY, Z)}{dY^2} \frac{1}{e^{2Y}} \\ &- \frac{u_2(X, Y, Z) - u_2(X, Y - dY, Z)}{dY} \frac{1}{e^{2Y}} \\ &+ \frac{u_2(X, Y, Z - dZ) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X, Y, Z + dZ)}{dZ^2} \frac{1}{e^{2Z}} \end{aligned}$$
(23)



$$x \ge 0, y < 0, z \ge 0$$

$$\frac{\partial^{2} u_{2}(X, Y, Z)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{2}(X, Y, Z)}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{2}(X, Y, Z)}{\partial z^{2}} = \frac{u_{2}(X - dX, Y, Z) - 2u_{2}(X, Y, Z) + u_{2}(X + dX, Y, Z)}{dX^{2}} \frac{1}{e^{2X}} - \frac{u_{2}(X, Y, Z) - u_{2}(X - dX, Y, Z)}{dX} \frac{1}{e^{2X}} + \frac{u_{2}(X, Y - dY, Z) - 2u_{2}(X, Y, Z) + u_{2}(X, Y + dY, Z)}{dY^{2}} e^{2Y} + \frac{u_{2}(X, Y, Z) - u_{2}(X, Y - dY, Z)}{dY} e^{2Y} + \frac{u_{2}(X, Y, Z) - u_{2}(X, Y, Z) + u_{2}(X, Y, Z + dZ)}{dZ} \frac{1}{e^{2Z}} - \frac{u_{2}(X, Y, Z) - u_{2}(X, Y, Z - dZ)}{dZ} \frac{1}{e^{2Z}}$$
(24)

$$\begin{aligned} x < 0, y \ge 0, z \ge 0 ; \\ \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2(X, Y, Z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{u_2(X - dX, Y, Z) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X + dX, Y, Z)}{dX^2} e^{2X} \\ &+ \frac{u_2(X, Y, Z) - u_2(X - dX, Y, Z)}{dX} e^{2X} \\ &+ \frac{u_2(X, Y - dY, Z) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X, Y + dY, Z)}{dY^2} \frac{1}{e^{2Y}} \\ &- \frac{u_2(X, Y, Z) - u_2(X, Y - dY, Z)}{dY} \frac{1}{e^{2Y}} \\ &+ \frac{u_2(X, Y, Z - dZ) - 2u_2(X, Y, Z) + u_2(X, Y, Z + dZ)}{dZ^2} \frac{1}{e^{2Z}} \\ &- \frac{u_2(X, Y, Z) - u_2(X, Y, Z - dZ)}{dZ} \frac{1}{e^{2Z}} \end{aligned}$$
(25)



$$x < 0, y < 0, z \ge 0$$
;

$$\frac{\partial^{2} u_{2}(X,Y,Z)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{2}(X,Y,Z)}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{2}(X,Y,Z)}{\partial z^{2}} = \frac{u_{2}(X-dX,Y,Z) - 2u_{2}(X,Y,Z) + u_{2}(X+dX,Y,Z)}{dX^{2}} e^{2X} + \frac{u_{2}(X,Y,Z) - u_{2}(X-dX,Y,Z)}{dX} e^{2X} + \frac{u_{2}(X,Y-dY,Z) - 2u_{2}(X,Y,Z) + u_{2}(X,Y+dY,Z)}{dY^{2}} e^{2Y} + \frac{u_{2}(X,Y,Z) - u_{2}(X,Y-dY,Z)}{dY} e^{2Y} + \frac{u_{2}(X,Y,Z) - u_{2}(X,Y-dY,Z)}{dZ} e^{2Y} - \frac{u(X,Y,Z) - u_{2}(X,Y,Z-dZ)}{dZ} - \frac{1}{e^{2Z}}$$
(26)

3.2.1.1 정확성 검증

로그격자 적용에 대한 타당성 및 정확성은 기존 등격자에서의 유한차분법 결과와의 비교를 통해 검증하였다. 검증을 위해 1.5km/s의 속도를 갖는 균질 수층 모델(Fig. 7)을 사용하였으며, 음원과 수진기의 위치를 나타내었다. 모델링 변수는 Table 2와 같다. 음원은 Fig. 8과 같이 절단주파수(cutoff frequency) 200Hz의 1차 미분가우스(first derivative gaussian) 파형을 사용하였다.

AND OCEZ

Table 2 Modeling parameters to verify the effects of logarithmic grid

Parameters	traditional	proposed
number of grid point, x-axis	200	183
number of grid point, y-axis	200	183
number of grid point, z-axis	100	48
grid interval	0.002	ln(1.002)
number of samples	3001	3001
sampling interval (ms)	0.	.1
cutoff frequency (Hz)	20	00





Fig. 7 velocity model and source and receiver position: in the (a) linear grid and (b) logarithmic grid



Fig. 8 Source wavelet(first derivative gaussian function)

검증을 위한 수치모형실험의 결과는 Fig. 9와 같다. 기존방법과 제안한 알고 리즘의 결과를 정규화한 Fig. 9 (c)로부터 기록된 신호의 파형 및 진폭이 일치 함을 확인할 수 있으며, 이를 통해 제안한 알고리즘의 타당성 및 정확성을 확인하였다.







Fig. 9 Verification results of proposed algorithm: in the (a) linear grid, (b) logarithmic grid, and (c) normalization result

3.2.1.2 효율비교

격자수의 감소효율을 확인하기 위해 등격자에서 200×200×100의 3차원 속도모델을 표현하는데 필요한 로그격자에서의 격자개수 및 메모리 용량을 비교하였다. real 32bit 기준, 등격자에서는 해당 모델을 표현하기 위해 약 15.26MB의 메모리가 필요하지만, 로그격자에서는 약 40%의 수준인 6.13MB가 필요함을 통해 연산에 사용되는 격자수의 감소로 사용메모리의 효율이 향상 되었음을 확인하였다(Table 3).

Table 3 Computational resources in the linear grid and logarithmic grid

	Linear grid	Logarithmic grid
number of grid point, x-axis	200	183
number of grid point, y-axis	200	183
number of grid point, z-axis	100	48
memory capacity (MB)	15.26	6.13
9	I	

이때 x축 및 y축에 대한 격자 감소량과 z축의 격자 감소량을 살펴보면, 각각 기존 등격자 대비 8.5% 감소(17격자), 52% 감소(52격자)로 z축에서의 감소량이 더욱 크다. 로그격자의 격자간격이 원점에서 멀어질수록 대수적으로 증가함을 고려하였을 때, 깊이방향으로만 로그격자가 적용된 z축에서 감소폭이 크게 나타났음을 확인하였다.

3.2.2 영역확장법의 적용에 따른 효율 비교

영역확장법은 가장 적용이 간편하고 계산이 쉬운 진폭비교 방법을 이용하였다. 초기 연산영역의 경계는 음원위치로부터 상·하·좌·우 10격자씩 떨어진 지점에 정사각형 형태로 설정하였으며, 경계의 확장폭도 동일하게 10격자로 설정하였다. 수치모델링의 수행 과정에서 고려해야 할 변수가 많기 때문에 변수의 최소화를 통한 알고리즘의 단순화를 위하여 동일한 격자수를 선정하였다. 연산영역의

- 23 -



경계는 여러 차례의 반복 실험을 통해 최대 진폭크기의 1% 이상에 해당하는 파동장 변화가 나타날 때 확장되도록 하였으며, 파동장의 전파속도보다 영역의 경계 확장속도가 빠르도록 경계위치가 아닌 경계보다 2격자 내부의 위치에서 미리 감지하도록 하였다. 경계조건은 영역확장법을 통해 확장된 연산영역의 경계가 초기 입력모델의 경계와 맞닿았을 때 수행되며, 레이놀즈 경계조건 (Reynolds boundary condition)을 적용하였다(Reynolds, 1978).

속도 변화에 따른 연산영역 확장속도의 변화를 확인하기 위해 Fig. 10과 같은 3차원 속도모델을 사용하였다. 속도모델은 최상부에 수층이 존재하며, 3.2km/s, 4.5km/s의 속도를 갖는 각각의 수평층으로 구성되어 있다. *y*축 중심에서 2차원 으로 표현된 속도모델 단면은 Fig. 11과 같다.



Fig. 10 Input velocity model (3D)





Fig. 11 Input velocity model (2D)

입력된 속도모델에 대해 제안 알고리즘을 이용하여 수치모델링을 수행하였다. 격자 변환과정에 따른 3차원 및 2차원에서의 속도모델 결과는 각각 Fig. 12, Fig. 13와 같다. *z*축의 깊이 방향으로 깊어짐에 따라 격자 간격이 대수적으로 증가하기 때문에, 3층의 두께가 실제 입력모델에 비해 얇게 표현됨을 확인할 수 있다.

Fig. 14는 로그격자에서 시간변화에 따른 파동장 계산영역의 변화를 나타낸 결과이다. 전체 계산영역을 기준으로 각 시간간격에서 영역확장법에 따른 계산 영역을 점선으로 나타내었다. 초기 속도가 일정한 수층에서는 등속도로 영역이 확장됨과는 달리 속도변화가 나타나는 2층 및 3층 구조에서 수평 및 수직방향의 확장속도가 달라짐을 확인할 수 있다.







Fig. 12 The velocity model transformed by logarithmic grid (3D)



Fig. 13 The velocity model transformed by logarithmic grid (2D)





(a)





(b)





Fig. 14 Snapshots of wavefield: (a) 0.09s, (b) 0.15s, and (c) 0.21s



제 4 장 수치예제를 통한 알고리즘 적용가능성 분석

4.1 수중음향환경에서의 알고리즘 적용

수중음향(underwater acoustic) 환경에서 표적 탐지 모의를 위한 수치모델링 에서는 고주파수 대역의 음원을 이용한다. 이때, 기존의 유한차분법을 이용할 경우 연산력의 한계로 수행이 불가하여, 키르히호프(Kirchhoff) 방법 등을 이용 한다. 하지만 유한차분법은 다른 방법들과 달리 파동의 모든 물리적 특성을 반 영할 수 있어 표적의 외부 구조뿐만 아니라 내부구조에 대한 고려가 가능하여, 본 연구에서 제안한 알고리즘을 이용할 경우 문제해결이 가능한지 수치예제를 통해 알아보았다.

수치예제에 사용한 표적모델은 3차원 1000×500×500 크기의 수층 모델 중심에 표적이 존재하는 형태로서 Fig. 15와 같다.

1945







제안 알고리즘을 통해 로그격자로 변환된 속도모델의 결과는 Fig. 16과 같다. 격자간격의 증가로 인해 표적의 좌우가 실제 모델보다 압축된 듯한 형태를 나타내고 있다.



Fig. 16 Target model in the logarithmic grid

Fig. 17은 로그격자에서 표적에 대한 파동장의 변화를 나타낸 스냅샷 결과이다. 로그격자로 인해 구형 발산하는 파동의 형태가 시각적으로 왜곡되어 나타남을 확인하였다. 표적의 내부구조로부터 기인한 반사파가 기록됨을 통해 제안 알고 리즘을 이용하여 수중음향환경에서의 표적 탐지 모의가 가능함을 확인하였다.

Collection



















Fig. 17 Snapshots for target model: (a) $0.6\mu s$, (b) $0.87\mu s$, (c) $0.9\mu s$, (d) $1.05\mu s$, and (e) $1.2\mu s$



수치모형실험의 정량적 결과는 Table 4와 같다. 기존의 등격자를 이용한 유한차분법과 비교하였을 때, 모델을 표현하기 위해 사용되는 메모리의 양이 7.3%수준(69.9MB)으로 감소하였으며, 계산시간 또한 17.0%수준(34.05분)으로 단축되었다.

Table 4 Computational resources for numerical test

	traditional	proposed
memory capacity (MB)	953.7	69.9
calculation time (min)	199.8	34.05





제 5 장 결론

점차 탄성파탐사 대상 환경이 고도화되고 복잡해짐에 따라 자료취득 이전에 다양한 환경에 대한 수치모델링이 필수적으로 요구되어지고 있다. 본 연구에서는 이러한 필요성에 맞춰 계산효율을 향상시킨 유한차분법을 이용한 수치모델링 알고리즘을 개발하였다. 로그격자를 이용한 유한차분법은 등격자와 비교하여 같은 거리를 나타내기 위해 보다 적은 연산량을 필요로 하여, 연산량의 감소를 통해 메모리의 사용량을 감소시킬 수 있다. 영역확장법은 파동장의 변화가 나타나지 않는 불필요한 연산을 생략함으로써 특히 초기시간에서의 계산량을 급격하게 감소시킬 수 있다. 반복적인 연산으로 인해 대용량의 리소스와 긴 계산시간을 필요로 하는 유한차분법을 이용한 모델링에서는 이러한 계산효율의 증대를 위한 방법이 유용하게 적용될 수 있다.

개발된 알고리즘에 대한 정확성 및 타당성 검증을 위해 균질한 수층모델에서 기존의 등격자 유한차분법을 이용한 수치해석적 결과와 비교하였다. 특정 지점 에서의 신호 비교 및 정규화된 신호 비교를 통해 진폭과 파형이 일치함을 확인 할 수 있었다. 적용가능성의 확인을 위한 수치예제로서 수중음향 환경에서의 실험을 수행한 결과 연산량 및 연산시간이 감소되었음을 확인하였다.

본 연구에서 제안한 알고리즘은 대용량의 메모리와 긴 계산 시간을 요구하던 기존의 등격자 유한차분법과 달리, 비교적 짧은 계산시간 내에 적은 계산으로도 동일한 정확성을 갖는 결과를 제시할 수 있어 큰 규모의 모델이나 3차원 모델에 대한 확장 적용에 매우 유용할 것으로 생각된다. 또한 탄성파탐사뿐만 아니라, 고주파수대역을 사용하는 수중음향 환경에서의 수중모델링 적용가능성도 확인 되었다. 본 연구를 기초연구로 하여 향후 추가적인 연구를 통해 탄성파동방정 식을 이용한 계산효율 향상 알고리즘을 개발함으로써 탄성매질에 대한 고려와 정확성의 향상 또한 가능할 것으로 기대된다.

Collection

감사의 글

미흡하고 부족했던 2년여 간의 석사과정을 마치며 저에게 도움을 주신 많은 분들께 이 자리를 빌려 감사의 말씀을 전합니다.

먼저 석사과정동안 많은 지도와 관심, 애정을 가져주신 지도교수 정우근 교수님께 깊이 감사드립니다. 크고 작은 실수에도 많은 기회를 주시고, 연구에 대한 즐거움뿐만 아니라 인생에 필요한 가르침과 지혜 등 많은 것들을 가르쳐 주셨습니다. 또한 석사졸업에 이르기 까지 많은 조언을 해주신 신성렬 교수님, 장원일 교수님, 윤지호 교수님, 임종세 교수님, 유경근 교수님, 그리고 늘 가까운 곳에서 도와주신 하지호 박사님께 감사드립니다.

길지만 짧았던 연구실 생활을 함께 한 많은 선후배분들께도 감사합니다. 저 또한 발전을 위해 더욱 노력할 것을 약속드리며, 훗날 좋은 자리에서 좋은 얼굴로 만나길 바랍니다.

항상 저를 믿어주시고 기다려주신 부모님, 가장 큰 의지가 되었던 동생 아람이, 이 외에 저에게 많은 도움과 영향을 주신 모든 분들께 다시 한 번 깊은 감사의 마음을 전하며 항상 건강하시고, 행복하시길 기원합니다.

2016년 2월

홍 보 람 드림

Collection

참고문헌

- 최종근, 2010. 수치해석. 텍스트북스.
- Awrejcewicz, J., 2011. Numerical Analysis Theory and Application. InTech.
- Choi, S., Min, D.J., Oh, W., Chung, W., Ha, W. & Shin, C., 2014. Frequency-domain acoustic and elastic modeling and waveform inversion in the logarithmic grid set. *Journal of seismic exploration*, 23, pp.103–130.
- Etgen, J.T. & O' Brien, M.J., 2007. Computational methods for large-scale 3D acoustic finite-difference modeling: A tutorial. *Geophysics*, 72, pp.SM223-SM230.
- Ha, W. & Shin, C., 2012. Efficient Laplace-domain modeling and inversion using an axis transformation technique. *Geophysics*, 77, pp.R141-R148.
- Ji, J. & Choi, Y.G., 2010. 3D seismic data processing methodology. *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, 13(2), pp.159–168.
- Kindelan, M., Kamel, A. & Sguazzero, P., 1990. On the construction and efficiency of staggered numerical differentiator for the wave equation. *Geophysics*, 55, pp.107–110.
- Kim, S., Kim, J. & Kim. H., 2011. A study on characteristics of marine geological structure by numerical modeling of seismic waves. *Proceedings of Korean Society of Marine Engineers Conference*, p.122.
- Liu, Y. & Sen, M.K., 2009. Advanced finite-difference methods for seismic modeling. *Geohorizons*, 14(2), pp.5–15.
- Mossberg, E., 2008. Some numerical and analytical methods for equations of



wave propagation and kinetic theory. Ph.D. Karlstad University.

- Ramsden, C., Bennett, G. & Long, A., 2005. High-resolution 3D seismic imaging in practice: analysis. *The Leading Edge*, 24(4), pp.423–428.
- Reynolds, A. C., 1978. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. *Geophysics*, 43(6), pp.1099–1110.
- Ryu, D.H., Kim, A. & Ha, W.S., 2015. Expanding domain method for 3D time-Laplace-domain hybrid modeling. *Geosystem Engineering*, pp.1–7.
- Suh, S. & Wang, B., 2011. Expanding domain methods in GPU based TTI reverse time migration. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, pp.3460–3464.
- Vidale, J.E., 1990. Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, 55, pp.521–526.



