



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사 학위논문

# 유한차분법을 이용한 해양부이 계류선의 3차원 구조해석

A Study on Three Dimensional Structural Analysis of Ocean Buoy  
Mooring Line Using Finite Difference Method

지도교수 박한일



2011년 8월

한국해양대학교 대학원

해양공학과  
김병모

공학석사 학위논문

# 유한차분법을 이용한 해양부이 계류선의 3차원 구조해석

A Study on Three Dimensional Structural Analysis of Ocean Buoy Mooring  
Line Using Finite Difference Method



2011년 8월

한국해양대학교 대학원

해양공학과

김병모

本 論 文 을 金 秉 模 의 工 學 碩 士 學 位 論 文 으 로 認 准 함 .

위원장 공학박사 최 경 식 인

위 원 공학박사 김 재 수 인

위 원 공학박사 박 한 일 인



2011년 8월

한국해양대학교 대학원

# A Study on Three Dimensional Structural Analysis of Ocean Buoy Mooring Line Using Finite Difference Method

Kim Byung Mo

*Department of Ocean Development Engineering*

*Graduate School of*

*Korea Maritime University*

## Abstract

A mooring system is employed to prevent floating structures being carried away by a strong wind, wave or current and to make floating structures keep in a stable position.

This paper describes a mooring system in curvilinear coordinate system. The governing equations for a mooring line include the effects of geometric non-linearities and bending stiffness of cables.

In order to solve this problem, nonlinear differential equations are converted to algebraic equations by a finite difference method. An implicit method and Newton Raphson iteration are adopted for the time integration and nonlinear solutions.

The results show the typical characteristics of a mooring line along the length from bottom to top side. The tension response amplitude tends to be proportional to the amplitude of displacement applied to

top side but tend to be inversely proportional to the time period applied to top side. Therefore, when a mooring line is designed, it has to be considered that the mooring lines tend to break under the huge and long period waves.

The amplitude of tension responses are large not only at top side but also at bottom side. So it is also essential to consider fatigue failure at both ends of cables.

The results of this study can contribute to the design of mooring system for a floating buoy.



# 목 차

Abstract .....	i
제목 목차 .....	ii
표 목차 .....	iv
그림 목차 .....	iv
수식 목차 .....	v

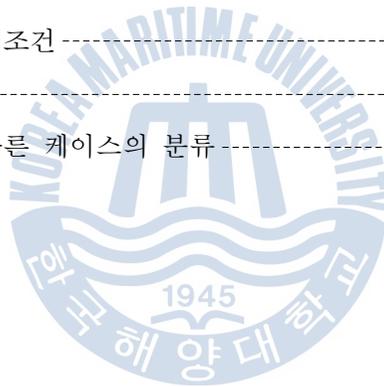
## 제 목 목 차

1. 서 론 .....	1
1.1. 연구 배경 .....	1
1.2. 연구 동향 .....	3
1.3. 연구 범위 .....	5
2. 해양 케이블의 운동학 .....	6
2.1. 전체좌표계와 국부좌표계 .....	6
2.1.1. 기저와 역행렬 .....	6
2.1.2. 국부좌표계의 지정 .....	6
2.1.3. 좌표계의 표현 .....	7
2.1.4. 회전변환행렬의 특성 .....	15
2.1.5. 벡터의 변환 .....	15
2.2. 좌표계와 벡터의 미분 .....	16
2.3. 각속도와 곡률의 국부적 표현 .....	17
3. 해양 케이블의 지배방정식 .....	19
3.1. 등체적 변형에 관한 근사화 .....	20

3.2. 하중요소의 정리	23
3.2.1. 유효중량과 부력	23
3.2.2. 동유체력	24
3.2.3. 케이블의 내력	26
3.3. 지배방정식의 수립	29
3.3.1. 병진변위에 대한 운동방정식	29
3.3.2. 회전변위에 대한 운동방정식	31
3.3.3. 적합조건식	40
3.3.4. 곡률의 정의	42
3.3.5. 지배방정식의 정리	42
3.3.6. 지배방정식의 단순화	43
3.3.7. 최종 지배방정식의 행렬 표현	50
4. 해양 케이블의 수치적 해석	53
4.1. 지배방정식의 차분 근사화	53
4.2. 뉴턴 랩슨법을 이용한 수치해석	61
4.2.1. 뉴턴 랩슨법의 원리	61
4.2.2. 지배방정식에의 적용	64
4.2.3. 경계조건의 적용	69
4.2.4. 증분의 보정과 수렴의 판별	71
5. 예제해석 및 검증	75
5.1. 정적 해석 결과 및 검토	75
5.2. 동적 해석 결과 및 검토	82
5.2.1. 프로그램 검증을 위해 작은 형상의 모델에 대한 해석 수행	82
5.2.2. 상부 가진조건에 따른 계류삭의 특성 파악	86
6. 결 론	93

## 표 목 차

Table 1	인장 전후 등체적 변화에 의한 물리량의 근사화(:푸아송 비, :변형률)	20
Table 2	인장 전후의 유효 중량과 부력	23
Table 3	국부좌표계 상에서의 케이블과 유체입자 간 상대속도 및 계수들	24
Table 4	계류삭의 물성치	75
Table 5	해양의 정상적 환경조건	76
Table 6	해석 조건	76
Table 7	해양의 정상적 환경조건	82
Table 8	계류삭의 물성치	83
Table 9	상단 가진조건	83
Table 10	해석조건	83
Table 11	해양의 정상적 환경조건	86
Table 12	계류삭의 물성치	86
Table 13	상부 가진조건에 따른 케이스의 분류	87



## 그림 차례

Fig. 1-1 NDBC 표준부이계류시스템-----	2
Fig. 2-1 전체좌표계와 국부좌표계-----	7
Fig. 2-3 Z축 회전각에 의한 좌표변환-----	8
Fig. 2-4 Y2축 회전각에 의한 좌표변환-----	10
Fig. 2-5 X3축 회전각에 의한 좌표변환-----	12
Fig. 2-6 국부좌표계를 통한 각속도의 표현 방법-----	17
Fig. 3-1 등체적 변화에 의한 근사 오차-----	21
Fig. 5-1 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 공차의 비율 변화-----	77
Fig. 5-2 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 총 오차의 변화-----	78
Fig. 5-3 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 보정계수의 변화-----	79
Fig. 5-4 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 부이점에서의 장력 변화-----	80
Fig. 5-5 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 앵커점에서의 장력 변화-----	80
Fig. 5-6 케이블의 연직 높이에 따른 장력의 변화-----	81
Fig. 5-7 시간에 따른 부이점 장력(위), 앵커점 장력(중간), 양단의 장력 차(아래)-----	84
Fig. 5-8 부이 계류삭의 3차원 거동-----	85
Fig. 5-9 계류삭의 YZ평면 거동-----	85
Fig. 5-10 계류삭의 XZ평면 거동-----	85
Fig. 5-11 계류삭의 XY평면 거동-----	85
Fig. 5-12 case 1의 부이점 장력 변화-----	87
Fig. 5-13 case 1의 앵커점 장력 변화-----	87
Fig. 5-14 case 1의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	88
Fig. 5-15 case 2의 부이점 장력 변화-----	88
Fig. 5-16 case 2의 앵커점 장력 변화-----	88
Fig. 5-17 case 2의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	88

Fig. 5-18 case 3의 부이점 장력 변화-----	89
Fig. 5-19 case 3의 앵커점 장력 변화-----	89
Fig. 5-20 case 3의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	89
Fig. 5-21 case 4의 부이점 장력 변화-----	89
Fig. 5-22 case 4의 앵커점 장력 변화-----	90
Fig. 5-23 case 4의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	90
Fig. 5-24 case 5의 부이점 장력 변화-----	90
Fig. 5-25 case 5의 앵커점 장력 변화-----	90
Fig. 5-26 case 5의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	91
Fig. 5-27 case 6의 부이점 장력 변화-----	91
Fig. 5-28 case 6의 앵커점 장력 변화-----	91
Fig. 5-29 case 6의 길이에 따른 장력 분포 변화-----	91



# 1. 서론

## 1.1. 연구 배경

해양 관측 부이는 폭풍, 해일 등과 같은 자연재해를 사전에 예보하고 기상자료 및 해양의 물리, 화학, 생물학적 데이터를 얻기 위해 설치 및 운용되고 있다. 현재 해양 관측 부이는 전 세계적으로 엄청난 수가 설치, 운용되고 있으며 나아가서는 이 자료를 얻기 위해 국가 간 네트워크를 구성하여 관측 자료를 공유하고 있다.

이러한 네트워크의 핵심에 있는 미국 NDBC(National Data Buoy Center)는 NWS(National Weather Service)의 한 부분으로 약 70개의 부이와 약 60개의 C-MAN(Coastal-Marine Automated Network) 관측지점의 네트워크를 개발, 운용, 관리한다. 여러 해양 선진국들도 부이를 자체 또는 공동 개발하여 운영하고 있고 관측된 자료는 미국 NDBC에서 취합하여 전 세계 수요자들에게 서비스되고 있다.(Shin, 2004)

이렇듯 전 세계적으로 설치된 계류 부이는 여름철에 태풍 등의 영향으로 계류삭이 끊어져서 표류하여 분실되기도 하고 관측 장비를 잃어버린 예가 많은데 부이의 파손을 줄이기 위해서는 이를 설계할 때 계류삭에 대한 안전성을 충분히 검토할 필요가 있다.

모든 부이의 계류삭은 일반적으로 6년 수명으로 설계된다. 계류삭의 종류는 부이본체의 종류와 위치, 수심에 따라 결정되며 연안의 작은 부이인 경우 체인 일체형을 주로 사용하고 깊은 수심에 설치될 경우 체인과 합성 나이론, 폴리프로필렌 등을 결합해서 사용한다.

NDBC의 계류삭을 선택 시 그 기준은 부이 본체의 타입과 위치, 수심을 고려해서 결정한다. 계류삭을 3부분으로 나누어 보면 상부는 부이 본체의 안정도와 계류삭 절단 방식을 위해 체인을 사용하고 중간부는 계류삭의 길이에 따라 체인 또는 합성 섬유를 사용하며 하부는 해저와의 마찰에 의한 마모 방지를 위해 체인을 사용한다.

본 논문에서는 부이 계류 시스템의 안정성 확보를 위해 다양한 유연세장체 중의 하나로 계류삭의 정적 및 동적 구조해석을 수행한다.

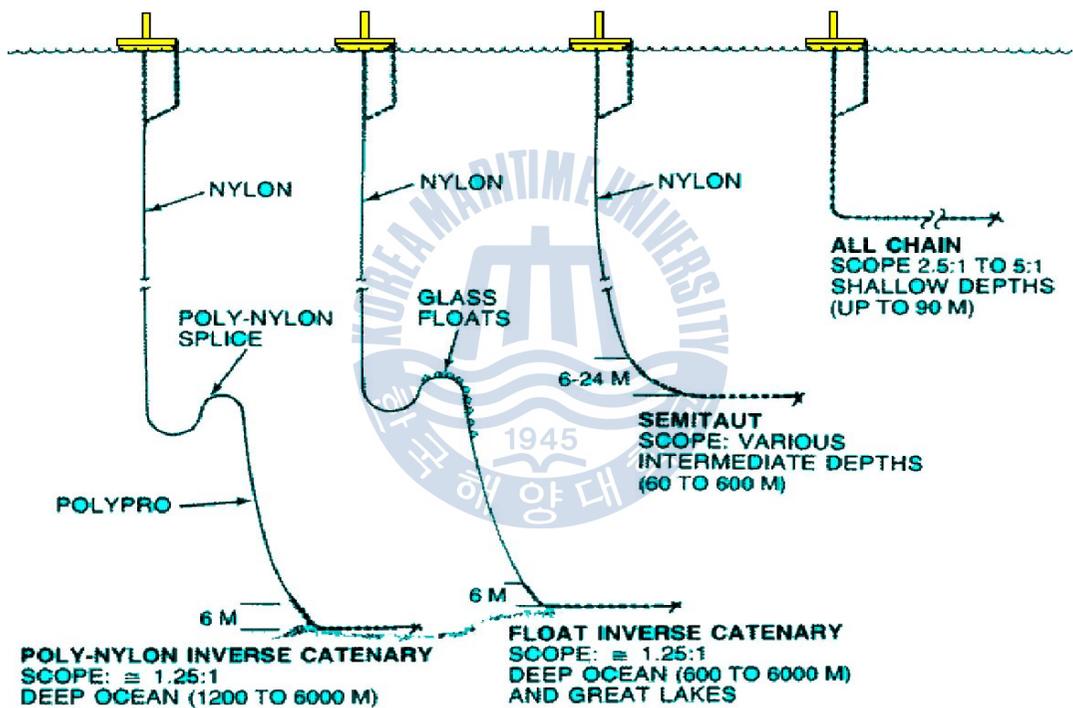


Fig. 1-1 NDBC 표준부이계류시스템

## 1.2. 연구 동향

계류삭과 같은 유연 세장체는 해양산업에서 다양하게 사용되고 있다. 예로서 부유식 해양구조물의 각종 계류삭, 예인용 음탐 케이블, ROV 케이블 등이 있으며 시스템의 안정성을 좌우하는 중요한 역할을 하고 있다.

해양시스템의 운용이나 안전을 위해서는 해양케이블에 대해 정확히 이해하는 것이 필수적이다. 그러나 해양케이블의 단순한 형태와는 달리 관련된 물리적인 현상은 아주 복잡하며 해석하기 어려운 점이 많다. 이러한 어려운 점은 여러 가지가 있는데, 첫째 비선형의 문제이다. 비선형의 문제는 대변형으로 인한 기하학적 비선형과 유체점성에 의한 유체 비선형이 포함되어 있다. 또 다른 난해한 문제는 케이블에 작용하는 유체역학적 문제이다. 즉, 부가질량계수나 항력계수의 정확한 추정, 와동방출에 의한 진동 해석, 상호간섭 문제 해석 등이다. 이와 같은 문제를 해결하고자 해 왔던 것이 지금까지의 해양 케이블에 대한 연구이다.(Jung, 2002)

흔히 해양 케이블은 주로 두 가지 분류 즉, 고장력 케이블과 저장력 케이블로 나누어 해석된다. 고장력 케이블은 보다 일반적이며 저장력 케이블에 비해 취급하기 쉽다. 고장력 케이블의 경우에는 보(beam)와는 달리 굽힘강성항이 장력에 비해 아주 작아서 무시된다. 고장력 케이블에 대해서는 수많은 연구가 진행되어 왔다. 고장력 케이블에 대한 전반적인 문제는 Irvine (1981) 이 쓴 책에 잘 소개되어 있다. 또한 Triantafyllou (1991) 이 쓴 논문에 고장력 케이블의 연구들에 관하여 잘 정리되어 있다.

저장력 케이블에 대한 연구는 최근에 활발히 시작되었다. 저장력의 경우에는 대변형이 발생할 수 있으므로 굽힘강성이 중요한 요소가 된다. 또한 대변형은 기하학적 비선형을 유발할 뿐만 아니라 유체점성에 의한 비선형 성분도 뚜렷해지므로 이것들을 반드시 고려해야 한다. 저장력 케이블에 대한 연구는 고장력 케이블에 비해 상대적으로 소수

이다. Leonard (1972)는 슬랙 케이블에 대한 문제를 해결하면서 처음으로 저장력 케이블의 동역학적인 문제를 고려했다. 그 이후에는 Dowing (1988), Triantafyllou and Triantafyllou (1991), Triantafyllou and Howell (1992, 1994) 등이 저장력 케이블의 문제를 보다 본격적으로 취급하기 시작했다.



### 1.3. 연구 범위

본 논문에서는 부이용 해양 케이블에 대한 정적 및 동적 구조해석을 하기 위해 수치해석적 연구를 수행하였다.

먼저 2장에서는 해양 케이블의 해석을 하기에 앞서 그에 필요한 운동학적 해석을 수행하였다. 곡선좌표계를 통해 전체좌표계와 국부좌표계를 정의하였고 각각의 좌표계에 따른 벡터의 표현과 변환을 설명하였다. 뿐만 아니라 좌표계에 따른 벡터의 미분과 그에 따른 각속도 및 곡률에 관해 고찰하였다.

3장에서는 해류에 의한 항력과 유효중량 등의 정상적인 하중 및 파랑에 의한 동수역학적 하중을 고려하여 적합한 운동방정식을 수립하였고 적합조건식과 곡률의 정의를 포함하여 지배방정식을 수립하였다. 각 항의 무차원화를 통해 지배방정식을 단순화하여 최종 지배방정식을 행렬로 표현하였다.

4장에서는 비선형 편미분방정식인 지배방정식을 길이요소 및 시간요소별로 차분하여 음함수법을 이용해 차분대수방정식으로 변환하고 뉴턴 램슨법을 이용해 시간영역 해석을 수행하였다.

5장에서는 개발된 프로그램을 이용하여 부이의 계류삭에 대한 예제를 해석하고 그 결과를 분석하여 부이 계류삭이 가지는 역학적 특성을 파악하였다.

6장은 결론으로서 다시 한 번 본 논문에 대해 요약하고 정리하며 향후 나아갈 방향을 제시하였다.

## 2. 해양 케이블의 운동학

### 2.1. 전체좌표계와 국부좌표계

해양 케이블의 운동을 설명하기 위해서는 적합한 좌표계를 설정하여야 한다. 본 절에서는 좌표계의 설정과 각 좌표계 간의 관계에 대해 설명하고자 한다.

#### 2.1.1. 기저와 역행렬

좌표계의 설정과정은 기저벡터를 통해 설명할 수 있다. 그러므로 기저집합과 기저행렬이 갖는 특성을 살펴볼 필요가 있다. 일반적인 실벡터공간  $R^n$ 에 관하여 기저집합을  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 라 두면 기저행렬은 아래와 같다.

$$I = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \quad \text{수식 2-1}$$

이 때  $I$ 는 직교행렬이므로 단위행렬  $E$ 에 대하여  $IX = XI = E$ 인  $I$ 의 역행렬  $X = I^{-1} = I^T$ 이다. 즉,  $I^{-1} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ 로 나타낼 수 있다..

#### 2.1.2. 국부좌표계의 지정

본 논문에서는 케이블의 해석을 위한 국부좌표계를 곡선좌표계로 지정하며 이 곡선좌표계는 Fig. 2-1과 같이 아래의 기저로 정의된다.

경로 또는 곡선  $\vec{r}: \vec{r}(x, y, z, t)$ 에 대하여,  $s$ 를  $\vec{r}$ 의 길이로 정의할 때,

$$\vec{r} \text{의 접선벡터 } \hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{r} \text{의 법선(곡률)벡터 } \hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds}, \vec{r} \text{의 종법선벡터 } \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

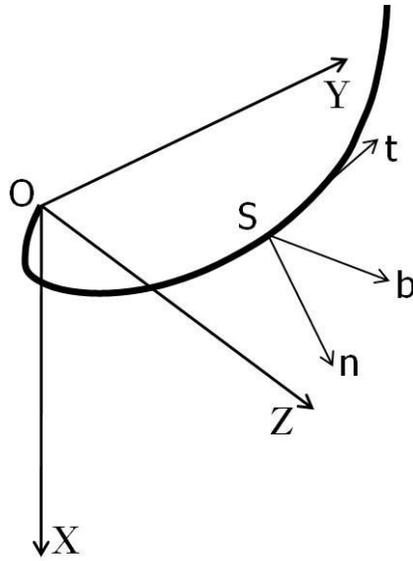


Fig. 2-1 전체좌표계와 곡부좌표계

### 2.1.3. 좌표계의 표현

본 논문에서는 Fig. 2-1과 같이 중력방향을  $x$  방향으로 설정하였다. 그에 대한 전체좌표계의 기저를 아래와 같이 정의하자.

$$x \text{ 축 단위벡터 } E_1 = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{수식 2-2}$$

$$y \text{ 축 단위벡터 } E_2 = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{수식 2-3}$$

$$z \text{ 축 단위벡터 } E_3 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{수식 2-4}$$

이 때, 가장 먼저  $z$  축을 기준으로 좌표계의 회전이 발생하면 그 회전각  $\phi$ 에 대해 회전된 좌표계는 아래의 그림과 같다.

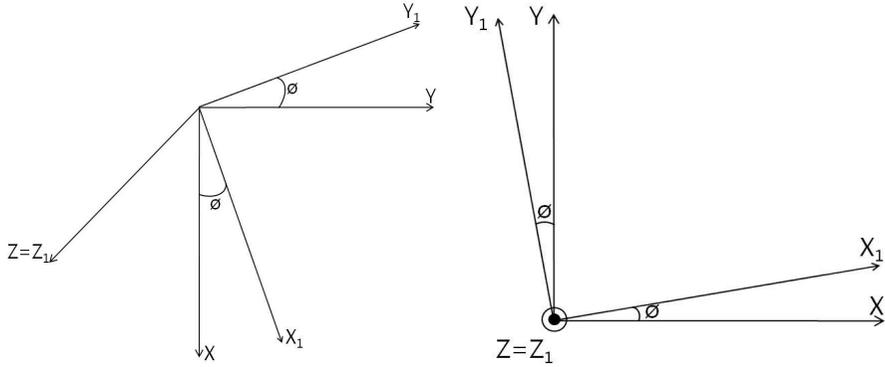


Fig. 2-3 Z축 회전각에 의한 좌표변환

이 때  $z_1$  축은  $z$  축과 같으므로  $z_1$  축의 단위벡터  $E'_3 = E_3$ 이다. 이제  $x_1$  축에 대한 기저

$E'_1$  와  $y_1$  축에 대한 기저  $E'_2$  를 구한다. 그를 위해  $E'_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ ,  $E'_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$  이라 하자.

먼저  $E'_1$  에 대하여 아래와 같이 세 방정식을 세울 수 있다.

$$E_1 \cdot E'_1 = \cos \phi \quad \text{수식 2-5}$$

$$E_2 \cdot E'_1 = \sin \phi \quad \text{수식 2-6}$$

$$E_3 \cdot E'_1 = 0 \quad \text{수식 2-7}$$

위 식을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-8}$$

따라서 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E'_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-9}$$

같은 방법으로  $E'_2$ 에 대하여 세 방정식을 세우면 아래와 같다.

$$E_1 \cdot E'_2 = -\sin\phi \quad \text{수식 2-10}$$

$$E_2 \cdot E'_2 = \cos\phi \quad \text{수식 2-11}$$

$$E_3 \cdot E'_2 = 0 \quad \text{수식 2-12}$$

즉, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E'_2 = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}^T \begin{vmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-13}$$

$E'_3 = E_3$ 와 수식 2-9 및 수식 2-13로부터 회전각  $\phi$ 에 의한 기저의 변환은 아래와 같음을 알 수 있다.

$$[E'_1 \ E'_2 \ E'_3] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}^T \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [E_1 \ E_2 \ E_3] \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-14}$$

$$x_1 \text{축 단위벡터 } E'_1 = \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j} + 0\hat{k} = \begin{vmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-15}$$

$$y_1 \text{축 단위벡터 } E'_2 = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j} + 0\hat{k} = \begin{vmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-16}$$

$$z_1 \text{축 단위벡터 } E'_3 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-17}$$

두 번째로  $y_1$ 축에 대해 회전각  $\theta$ 만큼 회전이 발생하면 그 때의 좌표계는 아래 그림과 같다.

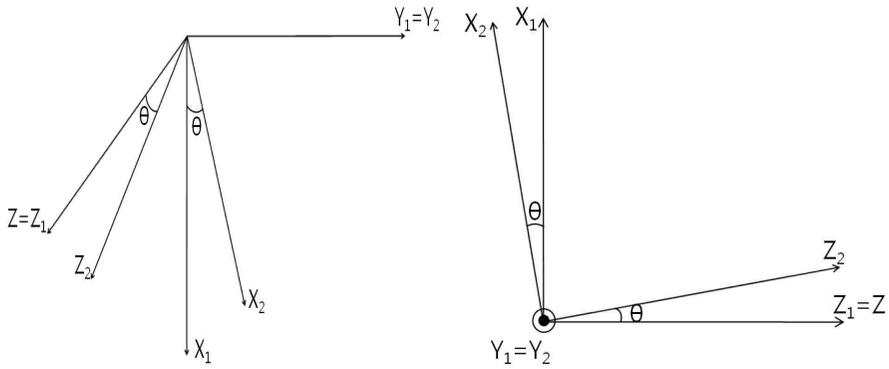


Fig. 2-4 Y<sub>2</sub>축 회전각에 의한 좌표변환

이 때  $y_2$  축은  $y_1$  축과 같으므로  $y_2$  축의 단위벡터  $E_2'' = E_2'$  이다. 그리고 나머지 두 기저

에 대하여  $x_2$  축 단위벡터  $E_1'' = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ,  $z_2$  축 단위벡터  $E_3'' = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$  이라 하자.

$E_1''$ 에 대하여 아래의 세 방정식을 수립할 수 있다.

$$E_1' \cdot E_1'' = \cos\theta \quad \text{수식 2-18}$$

$$E_2' \cdot E_1'' = 0 \quad \text{수식 2-19}$$

$$E_3' \cdot E_1'' = -\sin\theta \quad \text{수식 2-20}$$

위 식을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-21}$$

$$E_1'' = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-22}$$

$E_3''$ 에 대하여서도 같은 세 방정식을 수립할 수 있다.

$$E_1' \cdot E_3'' = \sin\theta \quad \text{수식 2-23}$$

$$E_2' \cdot E_3'' = 0 \quad \text{수식 2-24}$$

$$E_3' \cdot E_3'' = \cos\theta \quad \text{수식 2-25}$$

즉, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E_3'' = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-26}$$

$E_2'' = E_2'$  및 수식 2-22, 수식 2-26에 의해 회전각  $\theta$ 에 의한 기저의 회전은 아래와 같다.

$$[E_1'' \ E_2'' \ E_3''] = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = [E_1' \ E_2' \ E_3'] \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-27}$$

$$x_2 \text{ 축 단위벡터 } E_1'' = \cos\phi \cos\theta \hat{i} + \sin\phi \cos\theta \hat{j} - \sin\theta \hat{k} = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-28}$$

$$y_2 \text{ 축 단위벡터 } E_2'' = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j} + 0 \hat{k} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-29}$$

$$z_2 \text{ 축 단위벡터 } E_3'' = \cos\phi \sin\theta \hat{i} + \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k} = \begin{bmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-30}$$

세 번째로  $x_2$  축에 대해 회전각  $\psi$ 만큼 회전이 발생하면 그 때의 좌표계는 아래 그림과

같다.

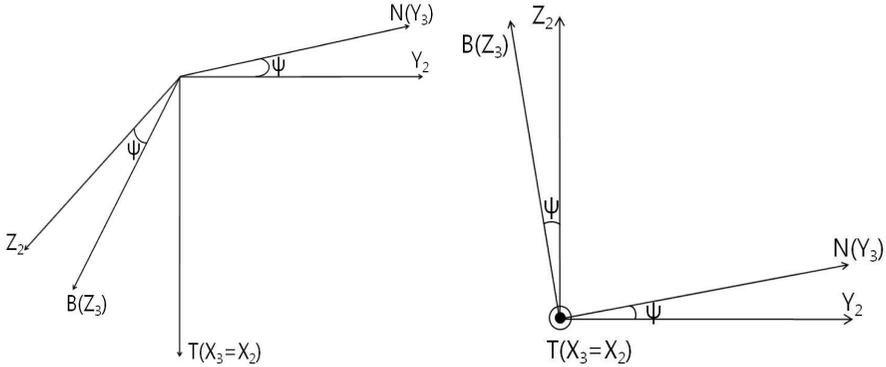


Fig. 2-5 \$X\_3\$축 회전각에 의한 좌표변환

세 번째이자 마지막 좌표계의 회전은 \$x\_2\$축을 기준으로 발생하기 때문에 \$x\_3\$축은 \$x\_2\$축과 같으며 회전된 좌표계는 최종적인 국부좌표계로 사용된다. 이 때 \$x\_3\$축은 \$T\$축, \$y\_3\$축은 \$N\$축, \$z\_3\$축은 \$B\$축에 해당된다.

\$x\_3\$축은 \$x\_2\$축과 같으므로 \$x\_3\$축의 단위벡터 \$E\_1''' = E\_1''\$이다. 그리고 나머지 두 기저에 대

하여 \$y\_3\$축 단위벡터 \$E\_2''' = \begin{bmatrix} a\_3 \\ b\_3 \\ c\_3 \end{bmatrix}\$, \$z\_3\$축 단위벡터 \$E\_3''' = \begin{bmatrix} p\_3 \\ q\_3 \\ r\_3 \end{bmatrix}\$이라 하자.

\$E\_2'''\$에 대하여 아래의 세 방정식을 수립할 수 있다.

$$E_1'' \cdot E_2''' = 0 \quad \text{수식 2-31}$$

$$E_2'' \cdot E_2''' = \cos \psi \quad \text{수식 2-32}$$

$$E_3'' \cdot E_2''' = \sin \psi \quad \text{수식 2-33}$$

위 식을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-34}$$

따라서 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E_2''' = \begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ \sin \psi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix}^T \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ \sin \psi \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-35}$$

$E_3'''$ 에 대하여서도 같은 세 방정식을 수립할 수 있다.

$$E_1'' \cdot E_3''' = 0 \quad \text{수식 2-36}$$

$$E_2'' \cdot E_3''' = -\sin \psi \quad \text{수식 2-37}$$

$$E_3'' \cdot E_3''' = \cos \psi \quad \text{수식 2-38}$$

즉, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E_3''' = \begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin \psi \\ \cos \psi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix}^T \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin \psi \\ \cos \psi \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-39}$$

$E_2'' = E_2'$  및 수식 2-35, 수식 2-39에 의해 회전각  $\psi$ 에 의한 기저의 회전은 아래와 같다.

$$[E_1''' \ E_2''' \ E_3'''] = \begin{bmatrix} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{bmatrix}^T \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \psi - \sin \psi & & \\ 0 \sin \psi & \cos \psi & \end{vmatrix} = [E_1'' \ E_2'' \ E_3''] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \psi - \sin \psi & & \\ 0 \sin \psi & \cos \psi & \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-40}$$

이렇게 세 단계에 걸쳐 회전된 좌표계를 최종적인 국부좌표계로써 사용하기 때문에 그 기저를 국부좌표계의 기저로 표현할 수 있다.

$$[\hat{t} \hat{n} \hat{b}] = [E_1'' E_2'' E_3''] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \psi - \sin \psi \\ 0 \sin \psi \cos \psi \end{vmatrix} \quad \text{수식 2-41}$$

수식 2-41에 수식 2-27 및 수식 2-14를 각각 순서대로 대입하면 아래와 같이 전체좌표계의 기저와 국부좌표계의 기저의 관계를 간단히 나타낼 수 있다.

$$[e_1 e_2 e_3] = [E_1 E_2 E_3] \Gamma = [E_1 E_2 E_3] \Gamma_\phi \Gamma_\theta \Gamma_\psi \quad \text{수식 2-42}$$

여기서  $\Gamma$ 는 기저 간의 변환행렬이며 아래와 같다.

$$\Gamma = \Gamma_\phi \Gamma_\theta \Gamma_\psi \quad \text{수식 2-43}$$

$$\left( \Gamma_\phi = \begin{vmatrix} \cos \phi - \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \Gamma_\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}, \Gamma_\psi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \psi - \sin \psi \\ 0 \sin \psi \cos \psi \end{vmatrix} \right)$$

따라서 아래와 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\cos \psi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-44}$$

만약 케이블의 비틀림을 무시한다면,  $x_3$ 축( $T$ 축)에 대한 회전각  $\psi = 0$ 이므로 아래와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-45}$$

### 2.1.4. 회전변환행렬의 특성

앞의 과정에서 정의되는 회전변환행렬  $\Gamma_\phi$ ,  $\Gamma_\theta$ ,  $\Gamma_\psi$ 는 모두 직교행렬이므로 그 역행렬은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_\phi^{-1} = \Gamma_\phi^T \quad \text{수식 2-46}$$

$$\Gamma_\theta^{-1} = \Gamma_\theta^T \quad \text{수식 2-47}$$

$$\Gamma_\psi^{-1} = \Gamma_\psi^T \quad \text{수식 2-48}$$

그러므로 회전변환행렬  $\Gamma$ 도 역시 직교행렬로 그 역행렬은 전치행렬과 같음을 알 수 있다.

### 2.1.5. 벡터의 변환

이와 같이 두 좌표계 기저 간의 변환관계를 나타내는 행렬  $\Gamma$ 를 이용하여 임의의 벡터  $\vec{a}$ 의 표현을 손쉽게 바꿀 수 있다. 먼저 국부좌표계 상의 기저로 표현된 벡터  $\vec{a}$ 를  $\vec{a}_{Local} = a_1 \hat{t} + a_2 \hat{n} + a_3 \hat{b}$ 라 하자. 이 벡터를 전체좌표계 상의 기저로 표현하면 아래와 같다.

$$\vec{a}_{Global} = \Gamma \cdot \vec{a}_{Local} \quad \text{수식 2-49}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

그 역의 관계도 성립한다.

$$\vec{a}_{Local} = \Gamma^{-1} \cdot \vec{a}_{Global} = \Gamma^T \cdot \vec{a}_{Global} \quad \text{수식 2-50}$$

## 2.2. 좌표계와 벡터의 미분

국부좌표계 상의 임의의 위치벡터  $\vec{P} = x\hat{t} + y\hat{n} + z\hat{b}$  에 대하여, 전체좌표계 상에서의 미분을 국부좌표계 상의 미분으로 변환하면  $\vec{P}$ 의 시간 미분은 아래와 같다.

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \left( \frac{dx}{dt}\hat{t} + \frac{dy}{dt}\hat{n} + \frac{dz}{dt}\hat{b} \right) + \left( x\frac{d\hat{t}}{dt} + y\frac{d\hat{n}}{dt} + z\frac{d\hat{b}}{dt} \right) \quad \text{수식 2-51}$$

즉, 아래와 같은 미분에 대한 좌표계 간의 표현관계를 알 수 있다.

$$\left( \frac{D\vec{P}}{Dt} \right)_{Global} = \left( \frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{Local} + \vec{w} \times \vec{P} \quad \text{수식 2-52}$$

(단,  $\vec{w}$ 는 전체좌표계에 대한 국부좌표계의 회전각속도)

어떤 위치벡터  $\vec{C}_{AB}$ 에 대하여  $\frac{d\vec{C}_{AB}}{dt} = \vec{V}_{AB} = \vec{w} \times \vec{C}_{AB}$  ( $\vec{w}$ 는 각속도)로 표현할 수 있으므로  $\vec{C}_{AB}$ 를 각각  $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ 라고 두면 국부좌표계의 각 기저의 미분을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \vec{w} \times \hat{t}, \quad \frac{d\hat{n}}{dt} = \vec{w} \times \hat{n}, \quad \frac{d\hat{b}}{dt} = \vec{w} \times \hat{b} \quad \text{수식 2-53}$$

앞서와 같은 원리로 전체좌표계상에서  $\vec{P}$ 의 길이 미분은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\left( \frac{D\vec{P}}{Ds} \right)_{Global} = \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right)_{Local} + \vec{\Omega} \times \vec{P} \quad \text{수식 2-54}$$

(단,  $\vec{\Omega}$ 는 전체좌표계에 대한 국부좌표계의 곡률)

### 2.3. 각속도와 곡률의 국부적 표현

국부좌표계에서 각속도 벡터 성분을 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{\omega} = \omega_t \hat{t} + \omega_n \hat{n} + \omega_b \hat{b} \quad \text{수식 2-55}$$

아래 그림과 같이 단계별로 좌표축을 회전시키며 그 각속도 벡터를 성분별로 분해하면 최종 회전 후 각 좌표축방향의 각속도 벡터 성분을 알 수 있다.

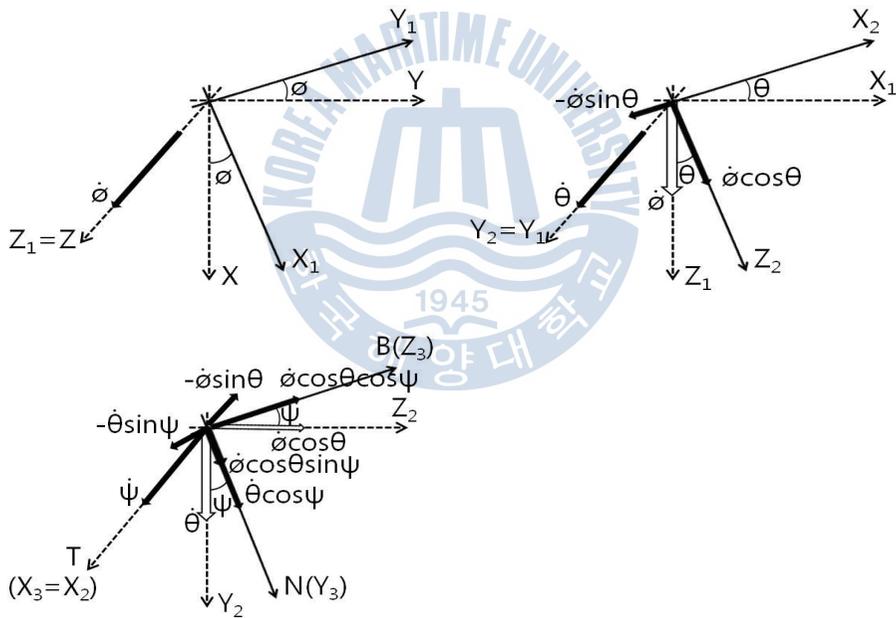


Fig. 2-6 국부좌표계를 통한 각속도의 표현 방법

각속도 성분은 회전각에 의해 표현되며 아래와 같다.

$$\omega_t = \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta \quad \text{수식 2-56}$$

$$\omega_n = \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad \text{수식 2-57}$$

$$\omega_b = \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{수식 2-58}$$

위 식을 벡터로 표현하면 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_t \\ \omega_n \\ \omega_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= [\chi] \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{수식 2-59}$$

위와 동일한 방법으로 곡률을 표현하면 아래와 같다.

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \\ \Omega_b \end{bmatrix} = [\chi] \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \psi' - \phi' \sin \theta \\ \phi' \cos \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi \\ \phi' \cos \theta \cos \psi - \theta' \sin \psi \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-60}$$

회전각의 변환 행렬인  $[\chi]$ 의 역행렬을 구하면 아래와 같다.

$$[\chi]^{-1} = \frac{1}{-\cos \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \theta \\ -\sin \psi & -\cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi \\ -\cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad \text{수식 2-61}$$

위 역행렬은 회전각  $\theta = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ , ( $n = -1, 0, 1, 2$ )일 경우 항상 특이점이 발생하므로 이 경우에는 방정식 풀이가 불가능하다. 본 논문에서 이 현상은 케이블이 수평면과 평행할 경우에 발생하게 된다. 그러나 부이 계류삭에서는 이런 현상이 잘 없을 뿐만 아니라 만약 이러한 현상이 발생한 경우에도 전체좌표계를 임의의 각도만큼 기울어지게 설정하여 특이점이 발생하지 않도록 설정할 수 있다.

### 3. 해양 케이블의 지배방정식

3장에서는 해양 케이블의 정역학적 해석을 수행한다. 2장에서 정립한 케이블의 운동계를 바탕으로 미소요소에 대한 정역학적 평형방정식을 유도하여 정리한 후, 곡률에 대한 운동학적 정의와 함께 케이블의 단위길이에 해당하는 지배방정식을 수립한다. 수립된 지배방정식을 차분을 통해 케이블의 미소요소에 대해 적용함으로써 강한 비선형 방정식을 선형화할 수 있다. 이 선형차분방정식의 해를 뉴턴 랩슨법을 이용해 수치적으로 구할 수 있다.

본 논문에서는 해양 케이블을 역학적으로 해석하기 위해 아래와 같은 몇 가지 가정을 한다.

- ① 케이블은 원형단면을 가지는 균질등방 탄성체이다.
- ② 케이블의 축방향 변형률은 미소하며 아래와 같이 정의한다.

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta s' - \delta s}{\delta s} = \frac{ds'}{ds} - 1 = e - 1 \quad \text{수식 3-1}$$

여기서  $e = \frac{ds'}{ds} = \epsilon + 1$

- ③ 전단변형효과는 무시하고 케이블의 변형은 등체적 변화라고 가정한다.
- ④ 선형탄성거동을 하는 케이블이므로 변형률과 장력의 관계는 아래와 같이 정의한다.

$$\epsilon = \sum_{N=1}^4 C_N f_3^{N-1} \quad \text{수식 3-2}$$

(단,  $C_N$  : 변형률-장력 곡선의 3차 다항식 계수,  $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ ,  $C_2 = \frac{1}{EA_0}$ )

### 3.1. 등체적 변형에 관한 근사화

	인장 전	인장 후(이론식)	인장 후(근사식) 등체적 변화 $\mu = 0.5$
전체 중량	$W$	$W' = W$	
밀도	$\rho$	$\rho' = \frac{W'}{V'} \times 1/g$	$\rho' = \rho$
길이	$l$	$l' = l(1 + \epsilon)$	
단위길이 당 중량	$w_0$	$w_0' = \frac{w_0}{1 + \epsilon}$	
직경	$d$	$d' = d(1 - \mu\epsilon)$	$d' = \frac{d}{\sqrt{(1 + \epsilon)}}$
단면적	$A$	$A' = A(1 - \mu\epsilon)^2$	$A' = \frac{A}{(1 + \epsilon)}$
이차모멘트	$I$	$I' = I(1 - \mu\epsilon)^4$	$I' = \frac{I}{(1 + \epsilon)^2}$
부피	$V = Al$	$V' = A'l' = A(1 - \mu\epsilon)^2 \cdot l(1 + \epsilon)$ $= V\{(1 - \mu\epsilon)^2 \cdot (1 + \epsilon)\}$	$V' \simeq V\{1 + (1 - 2\mu)\epsilon\}$ $= V$

Table 1 인장 전후 등체적 변화에 의한 물리량의 근사화( $\mu$ :푸아송 비,  $\epsilon$ :변형률)

이론식에 의하면 인장 후 부피는 아래와 같다.

$$V' = V\{(1 - \mu\epsilon)^2 \cdot (1 + \epsilon)\} \quad \text{수식 3-3}$$

위 식에서  $\epsilon$ 의 이차항은 미소하므로 0으로 간주하여 근사화하면 아래와 같이 근사식을 구할 수 있다.

$$V' \simeq V\{1 + (1 - 2\mu)\epsilon\} \quad \text{수식 3-4}$$

인장 전과 인장 후의 부피변화가 없는 등체적 변화를 가정하기 위하여  $\mu = 0.5$ 로 두자.

이러한 경우  $Al = A'l' = A'l(1+\epsilon)$ 이므로 인장 후의 케이블 단면적은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$A' = \frac{A}{(1+\epsilon)} \quad \text{수식 3-5}$$

이에 따라 직경과 이차모멘트는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$d' = \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}}, \quad I' = \frac{I}{(1+\epsilon)^2} \quad \text{수식 3-6}$$

이렇게 표현된 근사식으로 구한 근사값은 이론식으로 구한 정값과 비교하여 분명한 오차가 존재하므로 변형률에 따른 근사값의 오차를 파악하고 한계값을 정하여 근사식의 적용에 대한 타당성을 검토하여야 한다.

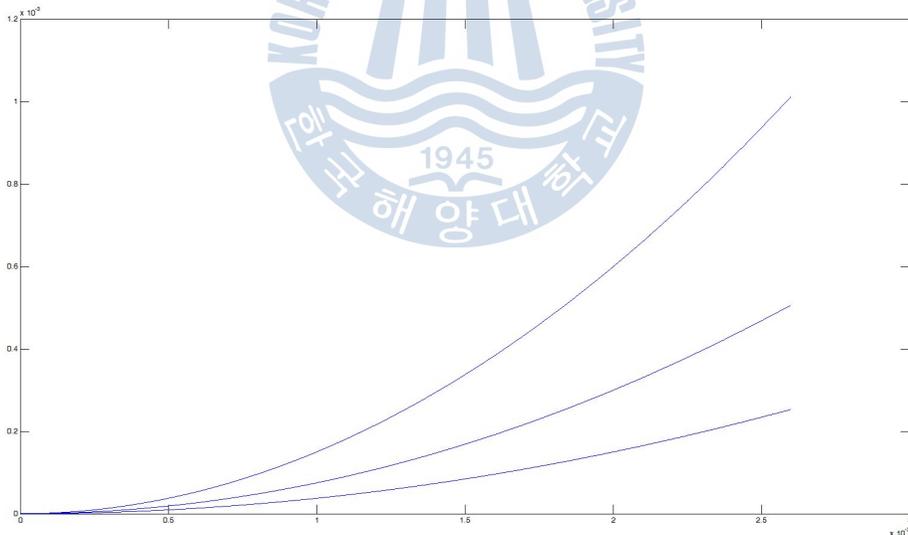


Fig. 3-1 등체적 변화에 의한 근사 오차

위 그래프는 변형률에 따른 체적, 단면적, 직경, 이차모멘트의 네 가지 물리량에 대한 오차의 비율을 그린 그래프로 그에 대한 식은 아래와 같다.

$$\text{오차비율} = \frac{|\text{근사값} - \text{이론값}|}{\text{이론값}} \times 100(\%)$$

변형률에 따라 가장 큰 오차를 보이는 물리량은 이차모멘트의 근사식이며 그 아래로 체적과 단면적 근사식에 대한 그래프가 겹쳐 그려져 같은 비율의 오차를 보이는 것을 알 수 있다. 가장 작은 오차를 보이는 것은 직경 근사식에 대한 오차이다.

오차를 파악하기 위해서는 이 중 가장 큰 오차를 보이는 이차모멘트 근사값을 기준으로 검토하는 것이 타당하다. 위 그래프에 따르면 변형률이 0.002583일 때 이차모멘트 근사값의 이론값에 대한 오차비율은 0.001% 미만으로 매우 미소함을 알 수 있다.

따라서 본 논문에서는 이런 미소한 오차를 무시하고 케이블의 등체적 변형을 가정하여 케이블에 관한 문제를 해결한다.



## 3.2. 하중요소의 정리

### 3.2.1. 유효중량과 부력

	인장 전	인장 후
단위길이 당 중량	$w_0$	$w_0' = \frac{w_0}{1+\epsilon}$
단위길이 당 부력	$\rho_w g A$	$\rho_w g \frac{A}{(1+\epsilon)}$
단위길이 당 유효 중량	$w = w_0 - \rho_w g A$	$w' = \frac{w_0}{1+\epsilon} - \rho_w g \frac{A}{1+\epsilon} = \frac{w}{1+\epsilon}$

Table 2 인장 전후의 유효 중량과 부력

단위길이 당 유효중량을 벡터형태로 표현하자. 이 때, 전제좌표계상의  $x$ 방향을 연직방향으로 설정하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{R}'_w = w' \hat{i} = \frac{w}{1+\epsilon} (\Gamma_{11}^{-1} \hat{t} + \Gamma_{21}^{-1} \hat{n} + \Gamma_{31}^{-1} \hat{b}) = \frac{w}{1+\epsilon} (\Gamma_{11} \hat{t} + \Gamma_{12} \hat{n} + \Gamma_{13} \hat{b})$$

수식 3-7

### 3.2.2. 동유체력

#### (가) 모리슨 방정식

동수역학적 하중을 계산하기 위해서는 아래와 같이 세 가지의 공식이 사용가능하며 각각의 공식마다 적합한 적용조건이 있다.

1. 모리슨 방정식
2. 회절이론
3. Froud-Krylov 이론

이 중 모리슨 방정식은 관성력과 항력의 합으로 유체력을 산정하며 파장에 비해 직경이 충분히 작은 세장체에 적용할 수 있다.(Patel, 1989) 따라서 본 논문에서는 동수역학적 하중을 산정하기 위해 모리슨 방정식을 사용한다. 구체적인 모리슨 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{모리슨 방정식} : f &= \frac{1}{2} \rho_w C_D d(u - \dot{x})|u - \dot{x}| + \rho_w C_I A(a_x - \ddot{x}) + \rho_w A\ddot{x} \\ &= \frac{1}{2} \rho_w C_D d(u - \dot{x})|u - \dot{x}| + \rho_w C_I A a_x - \rho_w (C_I - 1) A \ddot{x} \end{aligned}$$

수식 3-8

#### (나) 각 방향의 유체력 산정

	접선방향	법선방향	종법선방향
유체입자의 속도	$u_t$	$u_n$	$u_b$
케이블의 속도	$v_t$	$v_n$	$v_b$
상대속도	$v_{1r} = u_t - v_t$	$v_{2r} = u_n - v_n$	$v_{3r} = u_b - v_b$
유체력 계수	$C_{d1}$	$C_{d2}$	$C_{d3}$
관성력 계수	$C_{i1}$	$C_{i2}$	$C_{i3}$

Table 3 국부좌표계 상에서의 케이블과 유체입자 간 상대속도 및 계수들

각 절점에서 유체입자의 속도는 해류에 의한 유체의 운동과 파랑에 의한 유체의 운동의 합으로 결정되며 케이블에 작용하는 유체력은 케이블이 변형된 후의 상태에서 계산하는 것이 타당하므로 직경과 단면적을 각각  $d' = \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}}$  와  $A' = \frac{A}{(1+\epsilon)}$  로 사용한다.

1) 접선방향의 동유체력

$$R_t = R_{td} = \frac{1}{2} \rho_w C_{d1} \pi \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}} v_{1r} |v_{1r}| \quad \text{수식 3-9}$$

2) 법선방향의 동유체력

$$\begin{aligned} R_n &= R_{nd} + R_{nI} - \text{Added Inertia Force} \\ &= \frac{1}{2} \rho_w C_{d2} \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}} v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} + \rho_w C_{i2} \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \rho_w (C_{i2} - 1) \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial v_n}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \rho_w C_{d2} \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}} v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} + \rho_w C_{i2} \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{1}{1+\epsilon} m_a \frac{\partial v_n}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{수식 3-10}$$

3) 종법선방향의 동유체력

$$\begin{aligned} R_b &= R_{bd} + R_{bI} - \text{Added Inertia Force} \\ &= \frac{1}{2} \rho_w C_{d3} \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}} v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} + \rho_w C_{i3} \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial u_b}{\partial t} - \rho_w (C_{i3} - 1) \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial v_b}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \rho_w C_{d3} \frac{d}{\sqrt{(1+\epsilon)}} v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} + \rho_w C_{i3} \frac{A}{(1+\epsilon)} \frac{\partial u_b}{\partial t} - \frac{1}{1+\epsilon} m_a \frac{\partial v_b}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{수식 3-11}$$

따라서 동유체력벡터는 아래와 같다.

$$\vec{R}_f = R_t \hat{t} + R_n \hat{n} + R_b \hat{b} \quad \text{수식 3-12}$$

### 3.2.3. 케이블의 내력

케이블의 내력은 접선방향의 내력(장력), 법선방향의 내력(법선 전단력) 그리고 중법선 방향의 전단력(중법선 전단력)의 합으로 이루어지며 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\vec{f} = \vec{T} + \vec{S} + \vec{H} \quad \text{수식 3-13}$$

#### (가) 장력

늘어난 케이블 미소요소의 한 끝단에 작용하는 장력을  $\vec{T}_1 = T\hat{t}$ 라고 하면, 다른 쪽 끝단에 작용하는 장력은  $\vec{T}_2 = (T+dT)(\hat{t}+d\hat{t})$ 이다. 그 후 케이블 미소요소에 작용하는 유효장력을 계산하여야 한다.

$$\vec{T} = \vec{T}_2 - \vec{T}_1 = (T+dT)(\hat{t}+d\hat{t}) - T\hat{t} = Td\hat{t} + dT\hat{t} + dTd\hat{t} \quad \text{수식 3-14}$$

위 식 중 미소요소의 곱으로 표현된 이차 이상의 성분은 매우 작아 무시할 수 있으므로 아래와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{T} = Td\hat{t} + dT\hat{t} \quad \text{수식 3-15}$$

#### (나) 법선 전단력

3차원 구조해석을 수행하기 위해서는 각 축방향에 해당하는 내력을 고려하여야 한다. 그 중 하나는 앞서 살펴본 접선방향의 내력, 즉 장력이며 나머지 두 내력으로는 법선 및 중법선방향의 전단력을 생각할 수 있다.

먼저 법선방향의 전단력을 고려하자. 늘어난 케이블 미소요소의 한 끝단에 작용하는 법선 전단력을  $\vec{S}_1 = S\hat{n}$ 라고 하면, 다른 쪽 끝단에 작용하는 법선 전단력은  $\vec{S}_2 = (S+dS)(\hat{n}+d\hat{n})$ 이다. 그 후 케이블 미소요소에 작용하는 법선 전단력을 계산하여야 한다.

$$\vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1 = (S + dS)(\hat{n} + d\hat{n}) - S\hat{n} = Sd\hat{n} + dS\hat{n} + dSd\hat{n} \quad \text{수식 3-16}$$

위 식 중 미소요소의 곱으로 표현된 이차 이상의 성분은 매우 작아 무시할 수 있으므로 아래와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{S} = Sd\hat{n} + dS\hat{n} \quad \text{수식 3-17}$$

#### (다) 종법선 전단력

동일한 방법으로 종법선방향의 전단력을 고려하자. 늘어난 케이블 미소요소의 한 끝단에 작용하는 종법선 전단력을  $\vec{H}_1 = H\hat{b}$ 라고 하면, 다른 쪽 끝단에 작용하는 종법선 전단력은  $\vec{H}_2 = (H + dH)(\hat{b} + d\hat{b})$ 이다. 그 후 케이블 미소요소에 작용하는 종법선 전단력을 계산하여야 한다.

$$\vec{H} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = (H + dH)(\hat{b} + d\hat{b}) - H\hat{b} = Hd\hat{b} + dH\hat{b} + dHd\hat{b} \quad \text{수식 3-18}$$

위 식 중 미소요소의 곱으로 표현된 이차 이상의 성분은 매우 작아 무시할 수 있으므로 아래와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{H} = Hd\hat{b} + dH\hat{b} \quad \text{수식 3-19}$$

#### (라) 내력벡터의 정리

이제 각  $d\hat{t}, d\hat{n}, d\hat{b}$ 를 국부좌표계로 표현하자. 국부좌표계는 전체좌표계의 회전변환좌표계이므로  $\hat{t} + d\hat{t}, \hat{n} + d\hat{n}, \hat{b} + d\hat{b}$ 는 회전각  $\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi$ 에 의한 회전변환 기저라 할 수 있다. 즉, 국부좌표계와 전체좌표계 간의 변환행렬을 통해 아래와 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$[e'_1 \ e'_2 \ e'_3] = [E_1 \ E_2 \ E_3] \Gamma_{\phi + d\phi} \Gamma_{\theta + d\theta} \Gamma_{\psi + d\psi} \quad \text{수식 3-20}$$

위 식을 전개하여 구한  $d\hat{t}, d\hat{n}, d\hat{b}$  를 국부좌표계로 표현한 후 수식 3-15, 수식 3-17, 수식 3-19에 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \begin{vmatrix} dT + S(-\cos\theta\cos\psi d\phi + \sin\psi d\theta) + H(\cos\theta\sin\psi d\phi + \cos\psi d\theta) \\ dS + T(\cos\theta\cos\psi d\phi - \sin\psi d\theta) + H(\sin\theta d\phi - d\psi) \\ dH + T(-\cos\theta\sin\psi d\phi - \cos\psi d\theta) + S(-\sin\theta d\phi + d\psi) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} dT \\ dS \\ dH \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S(-\cos\theta\cos\psi d\phi + \sin\psi d\theta) + H(\cos\theta\sin\psi d\phi + \cos\psi d\theta) \\ T(\cos\theta\cos\psi d\phi - \sin\psi d\theta) + H(\sin\theta d\phi - d\psi) \\ T(-\cos\theta\sin\psi d\phi - \cos\psi d\theta) + S(-\sin\theta d\phi + d\psi) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \text{수식 3-21}$$

수식 3-21를 전체좌표계에 대한 단위길이 당 내력벡터로 변환하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{ds} &= \begin{vmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dS}{ds} \\ \frac{dH}{ds} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S(-\cos\theta\cos\psi \frac{d\phi}{ds} + \sin\psi \frac{d\theta}{ds}) + H(\cos\theta\sin\psi \frac{d\phi}{ds} + \cos\psi \frac{d\theta}{ds}) \\ T(\cos\theta\cos\psi \frac{d\phi}{ds} - \sin\psi \frac{d\theta}{ds}) + H(\sin\theta \frac{d\phi}{ds} - \frac{d\psi}{ds}) \\ T(-\cos\theta\sin\psi \frac{d\phi}{ds} - \cos\psi \frac{d\theta}{ds}) + S(-\sin\theta \frac{d\phi}{ds} + \frac{d\psi}{ds}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dS}{ds} \\ \frac{dH}{ds} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S \cdot -\Omega_b + H \cdot \Omega_n \\ T \cdot \Omega_b + H \cdot -\Omega_t \\ T \cdot -\Omega_n + S \cdot \Omega_t \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \text{수식 3-22}$$

수식 3-22의 첫 항은 내력벡터의 공간미분이다. 하지만 이 항은 내력벡터의 방향에 대한 미분은 고려되지 않았으므로 국부좌표계 상에서의 내력벡터에 대한 공간미분임을 알 수 있다. 두 번째 항은 미소요소에 대한 내력벡터 성분과 곡률 성분의 조합으로 즉, 내력벡터의 좌표변환에 의한 회전량을 나타낸다. 좀 더 간단히 표현하면 아래와 같다.

$$\left(\frac{D\vec{f}}{Ds}\right)_{Global} = \left(\frac{d\vec{f}}{ds}\right)_{Local} + \vec{\Omega} \times \vec{f} \quad \text{수식 3-23}$$

수식 3-23는 수식 2-54에서 증명한 ‘좌표계와 벡터의 미분과의 관계’와 일치한다.

### 3.3. 지배방정식의 수립

#### 3.3.1. 병진변위에 대한 운동방정식

운동방정식은 운동의 발생 후 임의의 시간에 대하여 성립하므로 케이블이 늘어난 상태에서의 물리량으로 수립하며, 수립 후 늘어나기 전의 표현으로 변환하여야 한다.

늘어난 상태의 미소 케이블 요소  $ds'$ 에 대하여 병진변위에 관한 운동방정식은 아래와 같이 뉴턴의 제2법칙을 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{f} + ds' \sum \vec{R} = m' ds' \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \text{수식 3-24}$$

$\vec{f}$  : 케이블 미소요소에 작용하는 내력(장력, 법선 전단력, 종법선 전단력)

$\vec{R}$  : 케이블 미소요소에 작용하는 단위길이 당 외력(유체항력, 유체관성력, 부가관성력, 유효중량)

$m'$  : 늘어난 상태의 케이블의 단위길이 당 질량

$\vec{V}$  : 케이블 미소요소의 병진속도

수식 3-24의 양변을  $ds'$ 로 나누면 케이블의 단위길이 당 운동방정식이 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{D\vec{f}}{Ds'} + \sum \vec{R} = m' \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \text{수식 3-25}$$

$Ds' = (1 + \epsilon)Ds$ 이고  $m' = \frac{m}{1 + \epsilon}$ 이므로 늘어난 상태의 운동방정식인 수식 3-25를 늘어나지 않은 상태에 대한 식으로 아래와 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{D\vec{f}}{Ds} + (1+\epsilon)\sum\vec{R} = m \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

수식 3-26

수식 3-26에서 전체좌표계 상의 미분을 국부좌표계 상의 미분으로 변환하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{f} + (1+\epsilon)\sum\vec{R} = m\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V}\right)$$

수식 3-27



### 3.3.2. 회전변위에 대한 운동방정식

회전변위에 대해 뉴턴의 제2법칙을 적용시키면 아래와 같은 운동방정식을 수립할 수 있다.

$$\text{내부모멘트} + \text{내력토크} + \text{외력토크} + \text{외부모멘트} = \frac{D}{Dt} (\text{각운동량}) \quad \text{수식 3-28}$$

#### (가) 내부 모멘트 벡터의 표현

늘어나지 않은 요소에 대한 내부 모멘트 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{M} = M_1 \hat{t} + M_2 \hat{n} + M_3 \hat{b} \quad \text{수식 3-29}$$

각 성분은 아래와 같다.

$$M_1 = GI_p \Omega_1, \quad M_2 = EI \Omega_2, \quad M_3 = EI \Omega_3 \quad \text{수식 3-30}$$

$G$  : 전단 탄성계수

$I_p$  : 극이차모멘트

$\Omega_1$  : 미소요소의  $T$ 축(접선방향)에 관한 회전 곡률(단위길이당 비틀각)

$E$  : 탄성계수

$I$  : 단면이차모멘트

$\Omega_2, \Omega_3$  : 미소요소의  $N$ 축(법선방향),  $B$ 축(종법선방향)에 관한 굽힘 곡률

즉, 아래와 같은 행렬의 형태로 표현할 수 있다.

$$\vec{M} = [K][I]\vec{\Omega} \quad \text{수식 3-31}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} : \text{강성 행렬}, [I] = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} : \text{단면의 이차 모멘트 행렬}$$

강성 행렬은 전단탄성계수  $G$ 와 인장탄성계수  $E$ 로 이루어져 있으며 두 탄성계수 사이에는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{수식 3-32}$$

본 연구에서는 케이블이 등체적 변형을 한다고 가정하였으므로  $\mu = 0.5$ 이다. 즉 전단탄성계수와 인장탄성계수 사이에는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$G = \frac{1}{3} \times E \quad \text{수식 3-33}$$

즉 강성행렬은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{수식 3-34}$$

한 편, 단면 이차모멘트 행렬  $[I]$ 는 극이차모멘트  $I_p$ 와 단면이차모멘트  $I$ 로 구성되어 있으며 본 연구에서는 원형단면 케이블에 관해서 다루므로  $I_p$ 와  $I$ 는 아래와 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$I_p = 2I \quad \text{수식 3-35}$$

즉, 단면의 이차모멘트 행렬은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$[I] = \begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I[U_1] \quad \text{수식 3-36}$$

그리고 굽힘 강성행렬  $[K][I]$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$[K][I] = EI \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = EI[U_2] \quad \text{수식 3-37}$$

여기서 단면이차모멘트  $I$ 와 극이차모멘트  $I_p$ 는  $d^4$ 에 비례하므로  $\vec{M}$ 도  $d^4$ 에 비례함을 알 수 있다. 이를 이용하여 늘어나지 않은 요소의 내부 모멘트 벡터와 늘어난 후, 요소의 내부 모멘트 벡터와의 관계를 표현할 수 있으며 그것은 아래와 같다.

$$\vec{M}' = \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \quad \text{수식 3-38}$$

### (나) 각운동량의 표현

케이블의 어떤 한 점(위치)  $A$ 에서 국부좌표계(관성좌표계)를 설정하며 좌표계의 종류로 곡선 좌표계를 사용하자. 이 때, 국부좌표계의 원점이 될 위치  $A$ 의 위치벡터(케이블의 경로 또는 곡선)를  $\vec{r}$ 이라 하고, 전체좌표계 상에서 위치  $A$ 까지의 길이(경로 또는 곡선의 길이)를  $s$ 라고 두면 곡선 좌표계의 제1기저인 접선벡터  $\hat{t}$ 는 정의에 의해 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \quad \text{수식 3-39}$$

즉, 접선벡터  $\hat{t}$ 는 케이블 상의 점  $A$ 의 위치벡터(케이블의 경로 또는 곡선)  $\vec{r}$ 을 그 길이  $s$ 로 미분한 벡터이다. 이 제1기저인 접선벡터  $\hat{t}$ 가 정의되기 위해서는 점  $A$ 에서 미소두께  $ds$ 를 갖는 케이블의 미소단면요소가 강체의 성질을 가져야함을 의미한다. 곧

미소단면요소 내의 어떠한 미소요소도 동일한 병진운동 및 회전운동을 한다.  
 케이블이 늘어난 상태일 때 미소단면요소의 임의의 점(예를 들면, 전체좌표계 상 원점  
 이나 또는 국부좌표계 상 원점)에 대한 각운동량  $\vec{A}_e$ 는 미소단면요소 내의 미소요소를  
 통해 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{A}_e &= \int_{m'} \vec{p} \times \vec{V} dm' && \text{수식 3-40} \\ &= \int_{m'} \vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) dm'\end{aligned}$$

$\vec{p}$  : 케이블이 늘어난 상태일 때 임의의 점(예를 들면, 좌표계 상 원점)에서 케이블 미  
 소요소까지의 위치벡터

$\vec{V}$  : 미소요소의 선속도 벡터

$\vec{\omega}$  : 미소요소의 회전에 대한 각속도 벡터

$m'$  : 늘어난 케이블의 단위길이 당 질량

$dm'$  : 케이블이 늘어난 상태일 때 미소요소의 질량, 즉 미소질량

수식 3-40의 각 물리량들을 이산화하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\vec{A}_e &= \sum_m \vec{p}_i \times (dm' \cdot \vec{V}) \\ &= \sum_m dm' \cdot \{ \vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) \} \\ &= \rho' \sum_m dV' \cdot \{ \vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) \} \\ &= \rho' \sum_m (ds' dA') \cdot \{ \vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) \} && \text{수식 3-41}\end{aligned}$$

수식 3-41의 각 벡터들을 국부좌표계 상의 성분값들로 표현하면 아래와 같다.

$$i\text{번째 미소요소의 위치벡터} : \vec{p}_i = x_i \hat{t} + y_i \hat{n} + z_i \hat{b} \quad \text{수식 3-42}$$

$$\vec{\omega} = \omega_t \hat{t} + \omega_n \hat{n} + \omega_b \hat{b} \quad \text{수식 3-43}$$

위 성분값들로 수식 3-41의 벡터곱을 전개하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\vec{\omega} \times \vec{p}_i = (\omega_n z_i - \omega_b y_i) \hat{t} + (\omega_b x_i - \omega_t z_i) \hat{n} + (\omega_t y_i - \omega_n x_i) \hat{b} \quad \text{수식 3-44}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) &= (\omega_t y_i^2 - \omega_n x_i y_i - \omega_b x_i z_i + \omega_t z_i^2) \hat{t} \\ &\quad + (\omega_n z_i^2 - \omega_b y_i z_i - \omega_t y_i x_i + \omega_n x_i^2) \hat{n} + (\omega_b x_i^2 - \omega_t z_i x_i - \omega_n z_i y_i + \omega_b y_i^2) \hat{b} \end{aligned} \quad \text{수식 3-45}$$

그런데 케이블의 미소단면요소는 강체로 고려되므로 그 형상은 세 축에 관해 대칭이다. 그러므로 아래와 같다.

$$\sum_m x_i y_i = \sum_{m'} y_i z_i = \sum_{m'} z_i x_i = 0 \quad \text{수식 3-46}$$

그리고  $x_i \leq ds$  이므로  $x_i^2 \leq ds'^2$  이다 따라서 아래와 같다.

$$x_i^2 \rightarrow 0 \quad \text{수식 3-47}$$

수식 3-46와 수식 3-47을 수식 3-41에 대입하면 미소단면요소의 각운동량을 보다 간단하게 표현할 수 있다.

$$\vec{A}_e = \rho' ds' \left[ \left\{ \omega_t \sum_m (y_i^2 + z_i^2) dA' \right\} \hat{t} + \left\{ \omega_n \sum_{m'} z_i^2 dA' \right\} \hat{n} + \left\{ \omega_b \sum_{m'} y_i^2 dA' \right\} \hat{b} \right] \quad \text{수식 3-48}$$

수식 3-48의 양변을  $ds'$ 로 나누면, 단위길이 당 단면의 각운동량은

$$I_p' = \sum_{m'} (y_i^2 + z_i^2) dA', \quad I' = \sum_{m'} y_i^2 dA' = \sum_{m'} z_i^2 dA' \text{ 이므로, 아래와 같이 정리할 수 있다.}$$

$$\vec{A}_e = \rho' ds' [I'] \vec{\omega} \quad \text{수식 3-49}$$

(다) 운동방정식의 수립

늘어난 후 미소요소에 대한 운동방정식을 전제좌표계를 기준으로 수립하면 아래와 같다.

$$\vec{M}' + \vec{p} \times \vec{f} + \sum \vec{p} \times \vec{R} ds' + \vec{Q} ds' = \frac{D}{Dt} [\rho' ds' [I'] \vec{\omega}] \quad \text{수식 3-50}$$

$\vec{M}'$  : 내부 모멘트 벡터

$\vec{p}$  : 미소요소의 위치벡터

$\vec{Q}$  : 외부 분포모멘트 벡터

수식 3-50을 단위길이에 해당하는 운동방정식으로 바꾸면 아래와 같다.

$$\frac{D}{Ds'} (\vec{M}') + \frac{D}{Ds'} (\vec{p} \times \vec{f}) + \sum \vec{p} \times \vec{R} + \vec{Q} = \frac{D}{Ds'} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho' ds' [I'] \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-51}$$

일반적으로 케이블의 경우 외부 분포 모멘트가 작용하지 않으므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{D}{Ds'} (\vec{M}') + \frac{D}{Ds'} (\vec{p} \times \vec{f}) + \sum \vec{p} \times \vec{R} = \frac{D}{Ds'} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho' ds' [I'] \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-52}$$

단위길이 당 내력토크 항을 전개하면 아래와 같다.

$$\frac{D}{Ds'} (\vec{M}') + \frac{D\vec{p}}{Ds'} \times \vec{f} + \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds'} + \sum \vec{p} \times \vec{R} = \frac{D}{Ds'} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho' ds' [I'] \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-53}$$

단위 접선벡터의 정의에 의해  $\frac{D\vec{p}}{Ds'} = \hat{t}$ 이므로 아래와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\frac{D}{Ds'}(\vec{M}') + \hat{t} \times \vec{f} + \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds'} + \sum \vec{p} \times \vec{R} = \frac{D}{Ds'} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho' ds' [I'] \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-54}$$

수식 3-54를 늘어나기 전의 표현으로 변환하면 아래와 같다.

$$\frac{1}{1+\epsilon} \frac{D}{Ds} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{f} + \frac{1}{1+\epsilon} \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds} + \sum \vec{p} \times \vec{R} = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{D}{Ds} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho(1+\epsilon) ds \frac{[I]}{(1+\epsilon)^2} \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-55}$$

양변에  $1+\epsilon$ 을 곱하면 아래와 같다.

$$\frac{D}{Ds} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) + \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds} + \sum \vec{p} \times \vec{R} (1+\epsilon) = \frac{D}{Ds} \left\{ \frac{D}{Dt} [\rho ds \frac{[I]}{(1+\epsilon)} \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-56}$$

케이블의 각운동량은 시간과 공간에 대하여 모두 연속이기 때문에 회전에 대한 관성력을 나타내는 우변은 미분 순서를 바꾸어도 동일하게 성립한다.

$$\frac{D}{Ds} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) + \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds} + \sum \vec{p} \times \vec{R} (1+\epsilon) = \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{D}{Ds} [\rho ds \frac{[I]}{(1+\epsilon)} \vec{\omega}] \right\} \quad \text{수식 3-57}$$

즉 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{D}{Ds} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) + \vec{p} \times \frac{D\vec{f}}{Ds} + \sum \vec{p} \times \vec{R} (1+\epsilon) = \frac{D}{Dt} \left[ \frac{\rho [I] \vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right] \quad \text{수식 3-58}$$

수식 3-58을 국부좌표계 상의 식으로 표현하기 위하여, 위치벡터  $\vec{p}$ 의 기준을 국부좌표계의 원점으로 두면  $\vec{p} \rightarrow 0$ 이므로 아래와 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\frac{D}{Ds} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) = \frac{D}{Dt} \left[ \frac{\rho [I] \vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right] \quad \text{수식 3-59}$$

이제 전체좌표계에 대한 미분을 국부좌표계에 대한 미분으로 변환하면 완전한 국부좌표계 상의 회전변위에 대한 운동방정식을 얻을 수 있으며 아래와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \vec{\Omega} \times \frac{\vec{M}}{(1+\epsilon)^2} + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right] + \vec{\omega} \times \left[ \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right]$$

수식 3-60

좌변의 첫 항은 인장 후 국부좌표계를 기준으로 표현한 단위길이당 내부 모멘트 벡터를 의미하고 두 번째 항은 전체좌표계에서 국부좌표계로의 변환에 기인한 내부 모멘트 벡터의 회전량을 의미한다. 우변의 첫 항은 인장 후 국부좌표계를 기준으로 표현한 관성력을 의미하며 두 번째 항은 전체좌표계에서 국부좌표계로의 변환에 기인한 관성력의 회전량을 의미한다. 이 때, 내부 모멘트 벡터  $\vec{M}$ 은 굽힘 강성과 곡률로 표현이 가능하므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{[K][I]\vec{\Omega}}{(1+\epsilon)^2} \right] + \vec{\Omega} \times \frac{[K][I]\vec{\Omega}}{(1+\epsilon)^2} + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right] + \vec{\omega} \times \left[ \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right]$$

수식 3-61

좌변과 우변의 첫 항들을 각각 전개하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{[K][I]}{(1+\epsilon)^2} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} - \frac{2[K][I]}{(1+\epsilon)^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times \frac{[K][I]\vec{\Omega}}{(1+\epsilon)^2} + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) \\ = \frac{\rho[I]}{(1+\epsilon)} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\omega} \times \left[ \frac{\rho[I]\vec{\omega}}{(1+\epsilon)} \right] \end{aligned}$$

수식 3-62

여기서 관성력에 관계되는 변형률을 무시( $\epsilon=0$ )하면 우변을 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{[K][I]}{(1+\epsilon)^2} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} - \frac{2[K][I]}{(1+\epsilon)^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times \frac{[K][I]\vec{\Omega}}{(1+\epsilon)^2} + \hat{t} \times \vec{f} (1+\epsilon) = \rho[I] \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \rho[I]\vec{\omega}$$

수식 3-63

위 식에 수식 3-37를 대입하고 양변에  $(1+\epsilon)^3$ 을 곱하면 운동방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
(1+\epsilon)EI[U_2]\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} - 2EI\frac{\partial \epsilon}{\partial s}[U_2]\vec{\Omega} + (1+\epsilon)EI\vec{\Omega} \times [U_2]\vec{\Omega} + \hat{i} \times \vec{f}(1+\epsilon)^4 \\
= \rho I([U_1]\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times [U_1]\vec{\omega})
\end{aligned}$$

수식 3-64



### 3.3.3. 적합조건식

미소요소에 대해서 적용되어지는 지배방정식에 대하여, 적합조건이란, 변형된 케이블의 인접하는 서로 다른 미소요소 간의 속도, 방향 그리고 변형률 등이 보존되어야 함을 의미한다. 또한 변형이 없는 경우에는 요소의 길이가 보존되는 것을 의미한다.

우선 전체좌표계의 원점에서부터 임의의 요소까지의 벡터를  $\vec{P}(t,s)$ 라 하자. 미소요소는 충분히 매끄럽게 연결되어있다고 가정하면  $\vec{P}(t,s)$ 는 변수  $s$ 와 변수  $t$ 에 관하여 연속성을 만족하므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{D}{Ds} \left( \frac{D\vec{P}}{Dt} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{D\vec{P}}{Ds} \right) \quad \text{수식 3-65}$$

수식 3-65의 좌우변을 각각 전개하여본다. 먼저 좌변은 아래와 같이 속도벡터와 곡률로 표현이 가능하다.

$$\frac{D}{Ds} \left( \frac{D\vec{P}}{Dt} \right) = \frac{D}{Ds} (\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{V} \quad \text{수식 3-66}$$

반면에 우변을 전개하기 위해 아래와 같이 접선벡터의 정의를 이용한다.

$$\hat{t} = \frac{D\vec{P}}{Ds'} = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{D\vec{P}}{Ds} \quad \text{수식 3-67}$$

여기서  $s'$ : 늘어난 상태의 케이블의 길이

따라서 우변은 아래와 같이 표현가능하다.

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{D\vec{P}}{Ds} \right) = \frac{D}{Dt} [(1+\epsilon)\hat{t}]$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{D}{Dt} [(1+\epsilon)] \right\} \cdot \hat{t} + (1+\epsilon) \frac{D\hat{t}}{Dt} \\
&= \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \hat{t} + (1+\epsilon) \vec{\omega} \times \hat{t}
\end{aligned}
\tag{수식 3-68}$$

따라서 적합조건식은 수식 3-66과 수식 3-68에 의해 국부좌표계 상에서 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \hat{t} + (1+\epsilon) \vec{\omega} \times \hat{t}
\tag{수식 3-69}$$



### 3.3.4. 곡률의 정의

앞서 2장에서 수식 2-60을 통해 정의했던 곡률의 국부적 표현을 이용하여 아래와 같이 세 가지의 방정식을 수립할 수 있다.

$$\Omega_t = \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \theta \quad \text{수식 3-70}$$

$$\Omega_n = \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \theta \sin \psi + \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \psi \quad \text{수식 3-71}$$

$$\Omega_b = \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \theta \cos \psi - \frac{\partial \theta}{\partial s} \sin \psi \quad \text{수식 3-72}$$

### 3.3.5. 지배방정식의 정리

본 논문에서는 케이블의 구조해석을 위해 병진 및 회전에 관한 운동방정식과 적합조건식 그리고 곡률의 정의를 이용하며 그 식은 각각 아래와 같다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{f} + (1 + \epsilon) \sum \vec{R} = m \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) \quad \text{수식 3-27}$$

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon) EI [U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} - 2EI \frac{\partial \epsilon}{\partial s} [U_2] \vec{\Omega} + (1 + \epsilon) EI \vec{\Omega} \times [U_2] \vec{\Omega} + \hat{t} \times \vec{f} (1 + \epsilon)^4 \\ = \rho I ([U_1] \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times [U_1] \vec{\omega}) \end{aligned} \quad \text{수식 3-64}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \hat{t} + (1 + \epsilon) \vec{\omega} \times \hat{t} \quad \text{수식 3-69}$$

$$\vec{\Omega} = [\chi] \frac{\partial \chi}{\partial s} = \begin{bmatrix} \psi' - \phi' \sin \theta \\ \phi' \cos \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi \\ \phi' \cos \theta \cos \psi - \theta' \sin \psi \end{bmatrix} \quad \text{수식 3-70,71,72}$$

위의 지배방정식은 12개의 스칼라로 구성된 벡터방정식으로써 유연하고, 비틀림강성을 가지며, 회전 관성을 고려한 원형 실린더의 3차원 동적 방정식이라 할 수 있다.

### 3.3.6. 지배방정식의 단순화

앞의 동적 방정식을 관심이 있는 특정한 영역에 적용할 경우 지배방정식 각 성분들의 중요성을 판별하여 몇 개의 항을 소거할 수 있는데 그 과정은 아래와 같다.(Grosenbaugh et al., 1993.)

#### (가) 기본단위의 무차원화

먼저 기본단위를 무차원화함으로써 각각의 항들이 가지고 있는 중요도의 비율을 알아볼 수 있다. 기본단위 중 길이를 무차원화하기 위해서는 임의의 점까지의 길이  $s$ 를 케이블 전체 길이  $L$ 에 대한 비율로 무차원화한다.

$$s_n = \frac{s}{L} : \text{케이블 전체 길이에 대한 길이의 비} \quad \text{수식 3-73}$$

$$\vec{\Omega}_n = \vec{\Omega} L \quad \text{수식 3-74}$$

기본단위 중 시간을 무차원화하기 위해서, 케이블 길이  $L$ 에 대한 기본 중력 운동(단진자운동)의 고유주기 기저  $\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}$ 를 기준으로 무차원화한다.

$$t_n = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = t \sqrt{\frac{g}{L}} : \text{길이 } L \text{인 단진자의 고유주기 기저에 대한 시간의 비} \quad \text{수식 3-75}$$

$$\vec{\omega}_n = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \vec{\omega} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{수식 3-76}$$

길이와 시간을 무차원화 하였으므로 이를 이용하여 속도를 무차원화 할 수 있다. 그 무차원화 계수는 아래와 같다.

$$\frac{\vec{V}_n}{\vec{V}} = \frac{\frac{s_n}{t_n}}{\frac{s}{t}} = \frac{\frac{s_n}{s}}{\frac{t_n}{t}} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{g}}}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{g}}}{L} = \frac{1}{\sqrt{Lg}}$$
수식 3-77

즉,  $\vec{V}_n$ 은 아래와 같다.

$$\vec{V}_n = \frac{1}{\sqrt{Lg}} \cdot \vec{V}$$
수식 3-78

### (나) 내력벡터와 외력벡터의 무차원화

앞서 수립한, 수식 3-26(병진변위에 대한 운동방정식)을 통하여 내력 벡터와 외력 벡터를 무차원화 한다. 수식 3-26은 아래와 같다.

$$\frac{D\vec{f}}{Ds} + (1+\epsilon)\sum\vec{R} = m \frac{D\vec{V}}{Dt}$$
수식 3-26

수식 3-26의  $s, t, \vec{V}$ 를  $s_n, t_n, \vec{V}_n$ 으로 표현하면 아래와 같다.

$$\frac{1}{mgL} \frac{D\vec{f}}{Ds_n} + \frac{1}{mg} (1+\epsilon)\sum\vec{R} = \frac{D\vec{V}_n}{Dt_n}$$
수식 3-79

수식 3-79를 통해 내력 벡터  $\vec{f}$ 와 외력 벡터  $\vec{R}$ 을 무차원화 할 수 있으며 아래와 같다.

$$\vec{f}_n = \frac{1}{mgL} \vec{f}$$
수식 3-80

$$\vec{R}_n = \frac{1}{mg} \vec{R}$$
수식 3-81

(다) 국부 좌표계 상의 케이블 회전 변위에 대한 운동방정식 무차원화

앞서 수립한, 수식 3-64(회전 변위에 대한 운동방정식)을 무차원화 시켜보자. 수식 3-64는 아래와 같다.

$$(1+\epsilon)EI[U_2]\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} - 2EI[U_2]\frac{\partial \epsilon}{\partial s}\vec{\Omega} + (1+\epsilon)EI\vec{\Omega} \times [U_2]\vec{\Omega} + \hat{t} \times \vec{f}(1+\epsilon)^4$$

$$= (1+\epsilon)^3 \rho I ([U_1] \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times [U_1] \vec{\omega})$$

수식 3-64

수식 3-64의 각 항을 무차원화 시켜 동일한 순서로 구성하면 아래와 같다.

$$(1+\epsilon) \frac{EI}{L^2} [U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}_n}{\partial s_n} - \frac{2EI}{L^2} [U_2] \frac{\partial \epsilon}{\partial s_n} \cdot \vec{\Omega}_n + (1+\epsilon) \frac{EI}{L^2} \cdot \vec{\Omega}_n \times [U_2] \vec{\Omega}_n \dots$$

$$+ \hat{t} \times \vec{f}_n mgL(1+\epsilon)^4 = (1+\epsilon)^3 \frac{\rho g I}{L} ([U_1] \frac{\partial \vec{\omega}_n}{\partial t_n} + \vec{\omega}_n \times [U_1] \vec{\omega}_n)$$

수식 3-82

양변을  $mgL$ 로 나눈 후, 좌변에 내력에 의한 성분만을 남기면 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\hat{t} \times \vec{f}_n (1+\epsilon)^4 = -(1+\epsilon) \frac{EI}{mgL^3} ([U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}_n}{\partial s_n} + \vec{\Omega}_n \times [U_2] \vec{\Omega}_n) + \frac{2EI}{mgL^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial s_n} \cdot [U_2] \vec{\Omega}_n$$

$$+ (1+\epsilon)^3 \frac{\rho I}{mL^2} ([U_1] \frac{\partial \vec{\omega}_n}{\partial t_n} + \vec{\omega}_n \times [U_1] \vec{\omega}_n)$$

수식 3-83

내력벡터  $\vec{f} = T\hat{t} + S_n\hat{n} + S_b\hat{b}$ 이므로 선형적인 장력과 변형률과의 관계를 적용하면 변형률을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \frac{T}{EA}$$

수식 3-84

그리고  $\vec{f}_n = \frac{\vec{f}}{mgL}$  이므로 장력  $T$ 를 무차원화 시키면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{t} \times \vec{f}_n (1+\epsilon)^4 = & -(1+\epsilon) \frac{EI}{mgL^3} ([U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}_n}{\partial s_n} + \vec{\Omega}_n \times [U_2] \vec{\Omega}_n) + \frac{2I}{AL^2} \frac{\partial T_n}{\partial s_n} \cdot [U_2] \vec{\Omega}_n \\ & + (1+\epsilon)^3 \frac{\rho I}{mL^2} ([U_1] \frac{\partial \vec{\omega}_n}{\partial t_n} + \vec{\omega}_n \times [U_1] \vec{\omega}_n) \end{aligned} \quad \text{수식 3-85}$$

**(라) 회전 변위에 대한 운동방정식을 구성하는 성분의 중요도 판별 및 소거**

수식 51에서 우변을 이루는 각 변수들의 상대적인 중요성을 결정하기 위하여 변수를 제외한 각 항들의 상수계수들에 대하여 살펴볼 필요가 있다. 각 항의 상수계수들을 아래와 같이 두자.

$$\alpha_1 = \frac{EI}{mgL^3} \quad : \text{제 1 굽힘강성 성분} \quad \text{수식 3-86}$$

$$\alpha_2 = \frac{2I}{AL^2} \quad : \text{제 2 굽힘강성 성분} \quad \text{수식 3-87}$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho I}{mL^2} \quad : \text{회전에 대한 관성 성분} \quad \text{수식 3-88}$$

먼저, 제 1 굽힘강성 성분과 회전에 대한 관성 성분의 상대적인 중요성을 알기 위해 두 값의 비를 따져본다.

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\rho g L}{E} \quad \text{수식 3-89}$$

일반적인 케이블의 경우, 이 비율은  $10^{-6}$ 의 자릿수를 가지며 이를 통해 제 1 굽힘강성 성분  $\alpha_1$ 에 비하여 회전에 대한 관성 성분  $\alpha_3$ 의 효과는 매우 작아 무시할 수 있음을 알 수 있다.

두 번째로 제 1 굽힘강성 성분과 제 2 굽힘강성 성분의 상대적인 중요성을 알기 위해

두 값의 비를 따져본다.

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2mgL}{AE} \quad \text{수식 3-90}$$

케이블의 단위 길이당 질량  $m$ 과 케이블의 밀도  $\rho$ 는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$m = \rho A \quad \text{수식 3-91}$$

위의 관계를 이용하면 아래와 같이 표현가능하다.

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2 \times \frac{\rho g L}{E} \quad \text{수식 3-92}$$

이를 통해 제 1 굽힘강성 성분  $\alpha_1$ 에 비하여 제 2 굽힘강성 성분  $\alpha_2$ 의 효과는 매우 작아 무시할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 아래와 같이 식을 간단히 표현할 수 있다.

$$\hat{t} \times \vec{f}_n (1 + \epsilon)^4 = - (1 + \epsilon) \frac{EI}{mgL^3} \left( [U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}_n}{\partial s_n} + \vec{\Omega}_n \times [U_2] \vec{\Omega}_n \right) \quad \text{수식 3-93}$$

#### (마) 전단력 성분의 중요성 판별

수식 3-93을 통해 전단력 성분인  $S$ ,  $H$ 성분의 중요성을 살펴본다. 위 식을 전개하면 다음과 같은 무차원 관계를 얻을 수 있다.

$$S_n = - \frac{1}{1 + \epsilon} \frac{EI}{mgL^3} \left( \frac{1}{3} \Omega_{n1} \Omega_{n2} + \frac{\partial \Omega_{n3}}{\partial s_n} \right) \quad \text{수식 3-94}$$

$$H_n = - \frac{1}{1 + \epsilon} \frac{EI}{mgL^3} \left( \frac{1}{3} \Omega_{n1} \Omega_{n3} - \frac{\partial \Omega_{n2}}{\partial s_n} \right) \quad \text{수식 3-95}$$

위 식에서 알 수 있는 바와 같이, 전단력 성분은 곡률성분  $\Omega_{n1}$ ,  $\Omega_{n2}$ ,  $\Omega_{n3}$ 과 케이블의

길이  $L$ 에 큰 영향을 받는다. 만약 케이블의 장력이 크다면 케이블이 팽팽하게 당겨져 그 곡률은 크지 않을 것이며 그에 더하여 긴 해양 케이블일 경우 그 길이에 비하여 굽힘강성 성분은 무시할 수 있다. 즉 전단력이 발생하지 않는다고 가정할 수 있다. 하지만 장력이 작다면 케이블이 덜 당겨져 곡률값은 커지며 더불어 길이가 짧다면, 굽힘강성의 영향도 강하게 나타나며 전단력이 발생하게 된다.

### (바) 정적분에 의한 방정식의 풀이

이와 같은 과정을 통해 단순화된 회전변위에 대한 지배방정식은 아래와 같다.

$$EI[U_2] \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial s} + EI\vec{\Omega} \times [U_2]\vec{\Omega} + \hat{t} \times \vec{f}(1+\epsilon)^3 = 0 \quad \text{수식 3-96}$$

수식 3-96의 접선방향 성분은 아래와 같다.

$$\frac{2}{3}EI \frac{\partial \Omega_t}{\partial s} = 0 \quad \text{수식 3-97}$$

여기서 곡률  $\Omega_t$ 는 접선방향의 곡률이므로 케이블의 단위 길이 당 비틀림 각도라 할 수 있다. 수식 3-97은 정적분을 통해 아래와 같이 해를 구할 수 있다.

$$\Omega_t = f(t) + C(\text{단, } C\text{는 적분상수}) \quad \text{수식 3-98}$$

따라서 케이블의 비틀림은 케이블의 길이(또는 위치)  $s$ 에 대하여 독립적이기 때문에 어떤 한 시점에 대하여 단위 길이 당 비틀림 각도는 케이블의 모든 절점에서 동일함을 의미한다.

수식 3-96에서 소거된 수식 3-97을 제외한 두 방정식은 최종 지배방정식에 포함되며 아래와 같다.

$$EI\Omega_n' + \frac{1}{3}EI\Omega_b^2 \tan\theta - S_b \left(1 + \frac{T}{EA}\right)^3 = 0 \quad \text{수식 3-99}$$

$$EI\Omega_b' - \frac{1}{3}EI\Omega_n\Omega_b\tan\theta + S_n\left(1 + \frac{T}{EA}\right)^3 = 0 \quad \text{수식 3-100}$$

### (사) 비틀림 성분의 소거

일반적으로 케이블 구조물에서는 외부 분포 모멘트 성분은 무시되며, 또한 비틀림 관성력은 굽힘강성 성분에 비하여 매우 작은 값이므로 생략된다. 따라서 모든 케이블 요소에 있어서 비틀림 각도  $\psi$ 는 고려되지 않는다. 그에 따라 곡률의 표현을 보다 간단하게 정리할 수 있다.

$$\Omega_t = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \sin\theta \quad \text{수식 3-101}$$

$$\Omega_n = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad \text{수식 3-102}$$

$$\Omega_b = \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos\theta \quad \text{수식 3-103}$$

위 식을 통해 비틀림 곡률 성분인  $\Omega_t$ 는  $\Omega_b$ 와  $\theta$ 에 따른 종속성분으로 표현가능하며 그 외의 두 방정식을 지배방정식으로 포함시킬 수 있다.

$$\Omega_n = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad \text{수식 3-104}$$

$$\Omega_b = \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos\theta \quad \text{수식 3-105}$$

변환행렬  $\Gamma$ 와 각속도의 표현도 보다 간단하게 정리할 수 있다.

$$\omega_t = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \sin\theta \quad \text{수식 3-106}$$

$$\omega_n = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{수식 3-107}$$

$$\omega_b = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos\theta \quad \text{수식 3-108}$$

### 3.3.7. 최종 지배방정식의 행렬 표현

위의 판별과정을 거쳐 중요하지 않은 성분을 소거하면 지배방정식은 수식 3-27, 69, 99, 100, 104, 105로 이루어진 10개의 방정식으로 정리될 수 있다.

$$m(\dot{v}_t + v_b \dot{\theta} - v_n \dot{\phi} \cos \theta) - T' - S_b \Omega_n + S_n \Omega_b - w \cos \phi \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_w C_{d1} \pi d \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} v_{1r} |v_{1r}| = 0$$

수식 3-109

$$m(\dot{v}_n + \dot{\phi}(v_t \cos \theta + v_b \sin \theta)) - S_n' - \Omega_b(T + S_b \tan \theta) - w \sin \phi \cos \theta - (1 + \epsilon)(R_{nd} + R_{nl}) + m_a \dot{v}_n = 0$$

$$m(\dot{v}_n + \dot{\phi}(v_t \cos \theta + v_b \sin \theta)) - S_n' - \Omega_b(T + S_b \tan \theta) - w \sin \phi \cos \theta$$

$$- \frac{1}{2} \rho_w C_{d2} d v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{(1 + \epsilon)} - \rho_w C_{i2} A \frac{\partial u_n}{\partial t} + m_a \dot{v}_n = 0$$

$$m(\dot{v}_n + \dot{\phi}(v_t \cos \theta + v_b \sin \theta)) - S_n' - \Omega_b(T + S_b \tan \theta) - w \sin \phi \cos \theta$$

$$- \frac{1}{2} \rho_w C_{d2} d v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} - \rho_w C_{i2} A \frac{\partial u_n}{\partial t} + m_a \dot{v}_n = 0$$

수식 3-110

$$m(\dot{v}_b - v_n \dot{\phi} \sin \theta - v_t \dot{\theta}) - S_b' + S_n \Omega_b \tan \theta + T \Omega_n - w \sin \theta - (1 + \epsilon)(R_{bd} + R_{bl}) + m_a \dot{v}_b = 0$$

$$m(\dot{v}_b - v_n \dot{\phi} \sin \theta - v_t \dot{\theta}) - S_b' + S_n \Omega_b \tan \theta + T \Omega_n - w \sin \theta$$

$$- \frac{1}{2} \rho_w C_{d3} d v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{(1 + \epsilon)} - \rho_w C_{i3} A \frac{\partial u_b}{\partial t} - m_a \dot{v}_b = 0$$

$$m(\dot{v}_b - v_n \dot{\phi} \sin \theta - v_t \dot{\theta}) - S_b' + S_n \Omega_b \tan \theta + T \Omega_n - w \sin \theta$$

$$- \frac{1}{2} \rho_w C_{d3} d v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} - \rho_w C_{i3} A \frac{\partial u_b}{\partial t} - m_a \dot{v}_b = 0$$

수식 3-111

$$EK \Omega_n' + \frac{1}{3} EK \Omega_b^2 \tan \theta - S_b (1 + \frac{T}{EA})^3 = 0$$

수식 3-112

$$EK \Omega_b' - \frac{1}{3} EK \Omega_n \Omega_b \tan \theta + S_n (1 + \frac{T}{EA})^3 = 0$$

수식 3-113

$$\frac{\dot{T}}{EA} - v_t' - \Omega_n v_b + \Omega_b v_n = 0$$

수식 3-114

$$(1 + \frac{T}{EA})\dot{\phi}\cos\theta - v_n' - \Omega_b(v_t + v_b\tan\theta) = 0 \quad \text{수식 3-115}$$

$$(1 + \frac{T}{EA})\dot{\theta} + v_b' - \Omega_b v_n \tan\theta - \Omega_n v_t = 0 \quad \text{수식 3-116}$$

$$\theta' - \Omega_n = 0 \quad \text{수식 3-117}$$

$$\phi' \cos\theta - \Omega_b = 0 \quad \text{수식 3-118}$$

여기서,  $\dot{V}$  : 시간 미분,  $V'$  : 공간 미분

위 식들은 아래와 같이 행렬의 형태로 표현할 수 있다.

$$\vec{Y}: [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \vec{C} = 0 \quad \text{수식 3-119}$$

우리가 알고자 하는 미지벡터는  $\vec{X}$ 이며 아래와 같다.

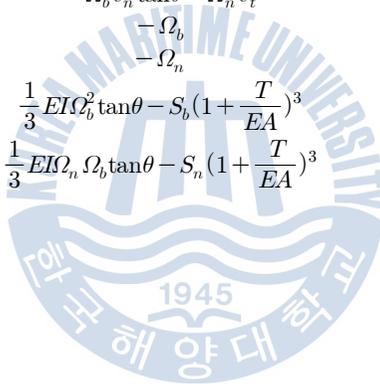
$$\vec{X} = (T, S_n, S_b, v_t, v_n, v_b, \phi, \theta, \Omega_n, \Omega_b)^T \quad \text{수식 3-120}$$

한편  $[A]$ ,  $[B]$ 는  $10 \times 10$ 의 정사각행렬로 아래와 같다.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & -mv_n \cos\theta & mv_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m + m_a & 0 & m(v_t \cos\theta + v_b \sin\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m + m_a & -mv_n \sin\theta & -mv_t & 0 & 0 \\ \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 + \frac{T}{EA})\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \frac{T}{EA}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 100000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 010000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 001000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 000100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 000010 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 000000 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 000000 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 000000 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 000000 & 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} S_n \Omega_b - S_b \Omega_n - w \cos \phi \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_w C_{d1} \pi d \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} v_{1r} |v_{1r}| \\ -\Omega_b (T + S_b \tan \theta) - w \sin \phi \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_w C_{d2} d v_{2r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} - \rho_w C_{i2} A \frac{\partial u_n}{\partial t} \\ S_n \Omega_b \tan \theta + T \Omega_n - w \sin \theta - \frac{1}{2} \rho_w C_{d3} d v_{3r} \sqrt{v_{2r}^2 + v_{3r}^2} \sqrt{1 + \frac{T}{EA}} - \rho_w C_{i3} A \frac{\partial u_b}{\partial t} \\ \Omega_b v_n - \Omega_n v_b \\ -\Omega_b (v_t + v_b \tan \theta) \\ -\Omega_b v_n \tan \theta - \Omega_n v_t \\ -\Omega_b \\ -\Omega_n \\ \frac{1}{3} EI \Omega_b^2 \tan \theta - S_b \left(1 + \frac{T}{EA}\right)^3 \\ \frac{1}{3} EI \Omega_n \Omega_b \tan \theta - S_n \left(1 + \frac{T}{EA}\right)^3 \end{bmatrix}$$



## 4. 해양 케이블의 수치적 해석

### 4.1. 지배방정식의 차분 근사화

본 절에서는 앞서 지배방정식  $\vec{Y}$ 를 차분을 통해 근사화한다. 그러나 지배방정식  $\vec{Y}$ 가  $s$ 와  $t$ 에 관한 함수이므로 두 변수에 관한 각각의 차분화가 적용되어야 한다.  $s$ 에 관한 차분은 케이블 요소에서 지배방정식을 적용하는 것이 타당하며 절점과 절점 간의 상호관계를 이용하여 수치해석적 방법으로  $\vec{X}$ 의 근사해를 구할 수 있음을 의미한다. 또한  $t$ 에 관한 차분을 통해 연속한 두 시점에서  $\vec{Y}$ 의 역학적 관계를 밝힘으로써 각각의 시간에 따른  $\vec{X}$ 의 근사해를 구한다.

먼저 케이블을 길이에 따라  $n-1$ 개의 요소로 분할하면  $n$ 개의 절점이 생성되며 각각 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n = s$$

수식 4-1

임의의 절점  $s_i$ 와 시간  $t_j$ 에서 어떤 행렬  $[M](s_i, t_j)$ 과 벡터  $\vec{V}(s_i, t_j)$ 의 근사치를 각각  $[M]_j^i$ 와  $\vec{V}_j^i$ 로 표현하자. 그렇다면 변수벡터  $\vec{X}(s_i, t_j)$ 에 대하여 각 절점  $s_i$ 와 시간  $t_j$ 에서의 변수벡터  $\vec{X}$ 에 대한 근사치를  $\vec{X}_j^i$ 라고 나타낼 수 있다.

공간변수  $s$ 와 시간변수  $t$ 에 관한 차분을 트라페조이드 법을 이용하여 시행한다.

$$s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}), \quad \Delta s = s_{i+1} - s_i \quad (\text{단, } i = 0, 1, \dots, n-1)$$

수식 4-2

$$t_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1}), \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j$$

수식 4-3

이와 같은 방법을 통해 공간 상 연속된 두 절점 사이의 케이블 요소에 대하여, 인접한 두 절점의 값으로 지배방정식을 이루고 있는 각 행렬과 벡터를 보간하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.(단,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )

$$\vec{X}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_j) = \frac{1}{2} (\vec{X}(s_i, t_j) + \vec{X}(s_{i+1}, t_j)) \quad \text{수식 4-4}$$

$$[A](s_{i+\frac{1}{2}}, t_j) = \frac{1}{2} ([A](s_i, t_j) + [A](s_{i+1}, t_j)) \quad \text{수식 4-5}$$

$$[B](s_{i+\frac{1}{2}}, t_j) = \frac{1}{2} ([B](s_i, t_j) + [B](s_{i+1}, t_j)) \quad \text{수식 4-6}$$

$$\vec{C}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_j) = \frac{1}{2} (\vec{C}(s_i, t_j) + \vec{C}(s_{i+1}, t_j)) \quad \text{수식 4-7}$$

또한 시간 상 연속된 두 시점 사이의 시간요소에 대하여, 인접한 두 시점의 값으로 지배방정식을 이루고 있는 각 행렬과 벡터를 보간하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.(단,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

$$\vec{X}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} (\vec{X}(s_i, t_j) + \vec{X}(s_i, t_{j+1})) \quad \text{수식 4-8}$$

$$[A](s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} ([A](s_i, t_j) + [A](s_i, t_{j+1})) \quad \text{수식 4-9}$$

$$[B](s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} ([B](s_i, t_j) + [B](s_i, t_{j+1})) \quad \text{수식 4-10}$$

$$\vec{C}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} (\vec{C}(s_i, t_j) + \vec{C}(s_i, t_{j+1})) \quad \text{수식 4-11}$$

이후에는 벡터  $\vec{X}$ 의 공간미분  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ 과 시간미분  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  또한 동일하게 나타내어야 한다. 우선 변수벡터  $\vec{X}$ 를 공간변수  $s$ 에 관해 테일러급수로 전개하면 아래와 같다.

$$\vec{X}(s_i + \Delta s_i, t_j) = \vec{X}(s_i, t_j) + \Delta s_i \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) + \frac{\Delta s_i^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2}(s_i, t_j) + O(\Delta s_i^3)$$

수식 4-12

우리가 알고자 하는 것은  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$  이므로 미분의 정의를 이용하여  $\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2}(s_i, t_j)$  항을 소거

하자. 미분의 정의에 의해  $\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2}(s_i, t_j)$  항은 아래와 같이  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j)$  로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2}(s_i, t_j) = \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i + \Delta s_i, t_j) - \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j)}{\Delta s_i}$$

수식 4-13

수식 4-13을 수식 4-12에 대입하면 아래와 같이  $\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2}(s_i, t_j)$  항을 소거할 수 있다.

$$\vec{X}(s_i + \Delta s_i, t_j) = \vec{X}(s_i, t_j) + \Delta s_i \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) + \frac{\Delta s_i^2}{2} \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i + \Delta s_i, t_j) - \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j)}{\Delta s_i} + O(\Delta s_i^3)$$

수식 4-14

수식 4-14을 변수분리하여  $\Delta s_i$ 로 나누면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{X}(s_i + \Delta s_i, t_j) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta s_i} &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i + \Delta s_i, t_j) - \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) \right\} + O(\Delta s_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i + \Delta s_i, t_j) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) \right\} + O(\Delta s_i^2) \end{aligned}$$

수식 4-15

수식 4-15에서  $s_i + \Delta s_i = s_{i+1}$  이므로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_j) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta s_i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_{i+1}, t_j) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_i, t_j) \right\} + O(\Delta s_i^2)$$

수식 4-16

수식 4-16에서 우변의 첫 항은 트라페조이드 법에 의해 연속한 두 절점  $s_i$ 와  $s_{i+1}$  사이에서의  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ 에 대한 평균값으로 보간될 수 있으므로, 오차항을 이항하면, 두 절점을 경계로 가지는 케이블 요소에서의  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ 는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_j) = \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_j) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta s_i} + O(\Delta s_i^2) \quad \text{수식 4-17}$$

시간미분 또한 동일한 방법으로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\vec{X}(s_i, t_{j+1}) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta t_j} + O(\Delta t_j^2) \quad \text{수식 4-18}$$

수식 4-17와 수식 4-18의 각 항을 아래와 같이 근사화하면 테일러 급수의 고차항으로 인한 오차 또한 무시할 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{X}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial s_j} = \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} \quad \text{수식 4-19}$$

$$\frac{\partial \vec{X}^i}{\partial t_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} \quad \text{수식 4-20}$$

이와 같은 과정을 통해 지배방정식을 이루는 모든 항을 시간요소와 공간요소의 양쪽 절점 값으로 표현하였다. 케이블 요소에 지배방정식을 적용하기 위해 트라페조이드 법을 이용하여  $s_{i+\frac{1}{2}}$ 에서의 값을  $s_i$ 와  $s_{i+1}$ 에서의 값으로 나타낸다.

$$[A] \frac{d\vec{X}}{dt} + [B] \frac{d\vec{X}}{ds} + \vec{C}|_{(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}})}$$

$$\begin{aligned}
&= [A](s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) + [B](s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) + \vec{C}(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2} \{ [A](s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + [A](s_{i+1}, t_{j+\frac{1}{2}}) \} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(s_{i+1}, t_{j+\frac{1}{2}}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ [B](s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + [B](s_{i+1}, t_{j+\frac{1}{2}}) \} \cdot \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_{j+\frac{1}{2}}) - \vec{X}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\Delta s_i} + O(\Delta s_i^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \vec{C}(s_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + \vec{C}(s_{i+1}, t_{j+\frac{1}{2}}) \} \qquad \text{수식 4-21}
\end{aligned}$$

그 후엔 시간요소에 관하여,  $t_{j+\frac{1}{2}}$ 에서의 값을  $t_j$ 와  $t_{j+1}$ 에서의 값으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \{ [A](s_i, t_j) + [A](s_i, t_{j+1}) \} + \frac{1}{2} \{ [A](s_{i+1}, t_j) + [A](s_{i+1}, t_{j+1}) \} \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{X}(s_i, t_{j+1}) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta t_j} + \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_{j+1}) - \vec{X}(s_{i+1}, t_j)}{\Delta t_j} \right\} + O(\Delta t_j^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} ([B](s_i, t_j) + [B](s_i, t_{j+1})) + \frac{1}{2} ([B](s_{i+1}, t_j) + [B](s_{i+1}, t_{j+1})) \right\} \\
&\quad \times \frac{\frac{1}{2} (\vec{X}(s_{i+1}, t_j) + \vec{X}(s_{i+1}, t_{j+1})) - \frac{1}{2} (\vec{X}(s_i, t_j) + \vec{X}(s_i, t_{j+1}))}{\Delta s_i} + O(\Delta s_i^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\vec{C}(s_i, t_j) + \vec{C}(s_i, t_{j+1})) + \frac{1}{2} (\vec{C}(s_{i+1}, t_j) + \vec{C}(s_{i+1}, t_{j+1})) \right\} \\
&\qquad \qquad \qquad \text{수식 4-22}
\end{aligned}$$

위 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \{ [A](s_i, t_j) + [A](s_i, t_{j+1}) + [A](s_{i+1}, t_j) + [A](s_{i+1}, t_{j+1}) \} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\vec{X}(s_i, t_{j+1}) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta t_j} + \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_{j+1}) - \vec{X}(s_{i+1}, t_j)}{\Delta t_j} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{8} \{ [B](s_i, t_j) + [B](s_i, t_{j+1}) + [B](s_{i+1}, t_j) + [B](s_{i+1}, t_{j+1}) \} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_j) - \vec{X}(s_i, t_j)}{\Delta s_i} + \frac{\vec{X}(s_{i+1}, t_{j+1}) - \vec{X}(s_i, t_{j+1})}{\Delta s_i} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \{ \vec{C}(s_i, t_j) + \vec{C}(s_i, t_{j+1}) + \vec{C}(s_{i+1}, t_j) + \vec{C}(s_{i+1}, t_{j+1}) \} + O(\Delta t_j^2) + O(\Delta s_i^2)$$

수식 4-23

위 식을 이루는 각 항을 근사화하여 표현하면 테일러 급수의 고차항으로 인한 오차 또한 무시할 수 있다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} ([A]_j^i + [A]_{j+1}^i + [A]_j^{i+1} + [A]_{j+1}^{i+1}) \times \left( \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} + \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_j^{i+1}}{\Delta t_j} \right) \\ &+ \frac{1}{8} ([B]_j^i + [B]_{j+1}^i + [B]_j^{i+1} + [B]_{j+1}^{i+1}) \times \left( \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} + \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_{j+1}^i}{\Delta s_i} \right) \\ &+ \frac{1}{4} (\vec{C}_j^i + \vec{C}_{j+1}^i + \vec{C}_j^{i+1} + \vec{C}_{j+1}^{i+1}) \end{aligned}$$

수식 4-24

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} ([A]_j^i + [A]_{j+1}^i + [A]_j^{i+1} + [A]_{j+1}^{i+1}) \times \left( \frac{\partial \vec{X}^i}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \vec{X}^{i+1}}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{1}{8} ([B]_j^i + [B]_{j+1}^i + [B]_j^{i+1} + [B]_{j+1}^{i+1}) \times \left( \frac{\partial \vec{X}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial s}_j + \frac{\partial \vec{X}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial s}_{j+1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} (\vec{C}_j^i + \vec{C}_{j+1}^i + \vec{C}_j^{i+1} + \vec{C}_{j+1}^{i+1}) \end{aligned}$$

수식 4-25

위와 같이 근사식으로 표현된 지배방정식에 아래와 같이 트라페조이드 법을 역으로 적용시킨다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} ([A]_j^i + [A]_{j+1}^i) + \frac{1}{2} ([A]_j^{i+1} + [A]_{j+1}^{i+1}) \right\} \times \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{X}^i}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \vec{X}^{i+1}}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} ([B]_j^i + [B]_{j+1}^i) + \frac{1}{2} ([B]_j^{i+1} + [B]_{j+1}^{i+1}) \right\} \times \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{X}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial s}_j + \frac{\partial \vec{X}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial s}_{j+1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\vec{C}_j^i + \vec{C}_{j+1}^i) + \frac{1}{2} (\vec{C}_j^{i+1} + \vec{C}_{j+1}^{i+1}) \right\} \end{aligned}$$

수식 4-26

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}([A]_{j+\frac{1}{2}}^i + [A]_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}([B]_{j+\frac{1}{2}}^i + [B]_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\vec{C}_{j+\frac{1}{2}}^i + \vec{C}_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}) \\
&= [A]_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + [B]_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \vec{C}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\
&= [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \vec{C} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \qquad \text{수식 4-27}
\end{aligned}$$

따라서 아래와 같이  $s_{i+\frac{1}{2}}$  와  $t_{j+\frac{1}{2}}$  에서 지배방정식을 두 절점  $s_i$  와  $s_{i+1}$  와 두 시점  $t_i$  와  $t_{i+1}$  에서의 근사값을 통해 근사화할 수 있음을 알 수 있다.

$$[A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \vec{C} \Big|_{(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}})} = [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \vec{C} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \qquad \text{수식 4-28}$$

수식 4-28은 지배방정식  $\vec{Y}$ 의 표현이므로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{Y} \Big|_{(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}})} = \vec{Y} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{수식 4-29}$$

(단,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ )

수식 4-29의 의의에 대하여 고찰해보자. 가장 먼저, 이러한 과정을 통해 알 수 있는 것은, 양 끝 절점에서의 근사해를 트라페조이드 법을 이용하여 보간하고 미분을 중앙 차분법을 이용하여 차분함으로써 지배방정식  $\vec{Y}$ 가 케이블의 절점에서 뿐만 아니라 연속한 두 절점으로 이루어진 케이블 요소에서도 타당하게 적용될 수 있다는 것이다. 또한 지배방정식  $\vec{Y}$ 를 해결하는데 있어, 수학적 방법으로 정해를 구하기 어려우므로 수치해석적 방법이 동원되어야 하며 그럴 경우 근사해를 구하게 되는데 위 식을 통해 근사해의 적용이 타당함을 알 수 있다. 세 번째로 매우 복잡한 비선형 미분방정식인 지

배방정식을 차분을 통해 대수방정식으로 변환시킴으로써 대수방정식에 적용되는 수치적 풀이법을 적용할 수 있다. 마지막으로 차분을 통해 시간 및 공간요소를 이루는 두 시점 및 절점 간의 관계를 파악함으로써  $t_j$ 에서의 근사해를 통해  $t_{j+1}$ 에서의 근사해를 구할 수 있다.



## 4.2. 뉴턴 랩슨법을 이용한 수치해석

### 4.2.1. 뉴턴 랩슨법의 원리

비선형 대수방정식의 형태를 갖춘 최종지배방정식  $\overline{Y}^{i+\frac{1}{2}}=0$ (단,  $i=0,1,\dots,n-1$ )의 수치적 해를 뉴턴 랩슨법을 이용하여 도출함으로써 케이블에 대한 물리적 해를 구할 수 있다. 먼저 뉴턴 랩슨법의 원리는 아래와 같다.

폐구간  $[a,b]$ 에서 실수  $R$ 에 대해 정의된 함수  $f:[a,b]\rightarrow R$ 가 미분가능할 때, 임의의  $x_k$ 에 대하여  $x_{k+1}$ 을

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{수식 4-30}$$

으로 정의하면, 반복적 계산의 시행 회수  $k$ 가 증가함에 따라

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0 \quad \text{수식 4-31}$$

으로 수렴하게 된다. 이때의  $x_k$ 을 방정식  $f(x)=0$ 에 대한 해의 근사라고 할 수 있다.

이 뉴턴 랩슨법은 아래와 같은  $n$ 개의  $n$ 원 연립방정식에서도 테일러 급수를 이용하여 확장 적용될 수 있다.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{수식 4-32}$$

우선 연립방정식을 이루는 각 함수들이 임의의 반복횟수  $k$ 에서  $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})^T$

의 근사해를 가진다고 하자. 이 때 충분히 작은  $\Delta X_k$ 만큼 증분이 발생한다면 아래와 같이 선형항만을 고려하여 테일러 급수로 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f_1(x_{1k} + \Delta x_1, x_{2k} + \Delta x_2, \dots, x_{nk} + \Delta x_n) &= \\
 f_1(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) + \Delta x_{1k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1k}} &+ \Delta x_{2k} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2k}} + \dots + \Delta x_{nk} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_{nk}} \\
 f_2(x_{1k} + \Delta x_1, x_{2k} + \Delta x_2, \dots, x_{nk} + \Delta x_n) &= \\
 f_2(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) + \Delta x_{1k} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1k}} &+ \Delta x_{2k} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2k}} + \dots + \Delta x_{nk} \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_{nk}} \\
 \dots & \\
 f_n(x_{1k} + \Delta x_1, x_{2k} + \Delta x_2, \dots, x_{nk} + \Delta x_n) &= \\
 f_n(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) + \Delta x_{1k} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1k}} &+ \Delta x_{2k} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2k}} + \dots + \Delta x_{nk} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_{nk}}
 \end{aligned}$$

테일러 급수로 전개된 위 식을 보다 간단히 이해하기 위해 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\vec{F}(\vec{X}_k + \Delta \vec{X}) = \vec{F}(\vec{X}_k) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}} \Big|_{\vec{X}=\vec{X}_k} \cdot \Delta \vec{X}_k \quad \text{수식 4-33}$$

여기서  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}}$ 는 야코비안 행렬(Jacobian Matrix)  $J$ 로 각 변수에 대한 각 함수의 편미분을 성분으로 가지는 정방행렬이며 아래와 같다.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

위 식을 통하여, 연립방정식에서 미소한  $\Delta \vec{X}_k$ 만큼의 증분을 시행하는 것은 근사해  $\vec{X}_k$ 에서의 오차를 각 변수의 기울기만큼 보정시킨다는 것을 알 수 있다. 따라서 시행 후의 값이 더욱 정해에 가까워짐을 예측할 수 있기 때문에 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{F}(\vec{X}_k + \Delta \vec{X}_k) = \vec{F}(\vec{X}_k) + J|_{\vec{X}=\vec{X}_k} \cdot \Delta \vec{X}_k = 0 \quad \text{수식 4-34}$$

위 식을 통해 근사해의 증분값은 아래와 같이 테일러 급수 전개를 통해 얻어지는 야코비안 행렬로 결정되어짐을 알 수 있다.

$$\Delta \vec{X}_k = -J^{-1}|_{\vec{X}=\vec{X}_k} \cdot \vec{F}(\vec{X}_k) \quad \text{수식 4-35}$$

따라서 계산의 시행 후 근사해  $\vec{X}_k$ 보다 정해에 더욱 가까운 새로운 근사해  $\vec{X}_{k+1}$ 은 아래와 같이 표현된다.

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \Delta \vec{X} = \vec{X}_k - J^{-1}|_{\vec{X}=\vec{X}_k} \cdot \vec{F}(\vec{X}_k) \quad \text{수식 4-36}$$

이러한 계산의 반복 시행 회수  $k$ 이 증가함에 따라 근사해  $\vec{X}_k$ 은 정해로 수렴하게 된다. 단, 야코비안 행렬  $J$ 가 특이행렬(Singular Matrix)이 아니어야 하며 거의 특이행렬에 가까울 경우 야코비안 행렬을 풀이하는 것은 거의 불가능하다.

### 4.2.2. 지배방정식에의 적용

먼저 아래의 케이블 요소의 지배방정식에 대한 뉴턴 랩슨 반복식을 수립하여야 한다.

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = 0 \text{ (단, } i = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{수식 4-37}$$

지배방정식을 아래와 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} & \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &= [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \vec{C}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &= [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \vec{C}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{수식 4-38}$$

수식 4-38에서 첫 항은  $t$ 에 대한 미분을 포함하고 있는 항이므로  $s$ 에 대해, 두 번째 항은  $s$ 에 대한 미분을 포함하고 있는 항이므로  $t$ 에 대해 그리고 세 번째 항은 임의의 순서로 각각 트라페조이드 법을 적용하면 아래와 같이 전개할 수 있다.

$$= \frac{1}{2} ([A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^i + [A] \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}) + \frac{1}{2} ([B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \Big|_j^{i+\frac{1}{2}} + [B] \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \Big|_{j+1}^{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (\vec{C}_j^{i+\frac{1}{2}} + \vec{C}_{j+1}^{i+\frac{1}{2}}) \quad \text{수식 4-39}$$

수식 4-39에 미분의 근사화를 적용하면 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} ([A]_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} + [A]_{j+\frac{1}{2}}^{i+1} \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_j^{i+1}}{\Delta t_j}) \\ &+ \frac{1}{2} ([B]_j^{i+\frac{1}{2}} \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} + [B]_{j+1}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_{j+1}^i}{\Delta s_i}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2}(\vec{C}_j^{i+\frac{1}{2}} + \vec{C}_{j+1}^{i+\frac{1}{2}})$$

수식 4-40

수식 4-40의 계수항을 다시 한 번 트라페조이드 법으로 전개하면 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}([A]_j^i + [A]_{j+1}^i) \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} + \frac{1}{4}([A]_j^{i+1} + [A]_{j+1}^{i+1}) \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_j^{i+1}}{\Delta t_j} \\ &+ \frac{1}{4}([B]_j^i + [B]_j^{i+1}) \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} + \frac{1}{4}([B]_{j+1}^i + [B]_{j+1}^{i+1}) \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_{j+1}^i}{\Delta s_i} \\ &+ \frac{1}{4}(\vec{C}_j^i + \vec{C}_j^{i+1} + \vec{C}_{j+1}^i + \vec{C}_{j+1}^{i+1}) \end{aligned} \quad \text{수식 4-41}$$

지배방정식  $\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ 를 이루는 모든 항을  $s_i, t_j$ 에서의 표현으로 차분하여 전개하였으므로 수식 4-41를 각 절점 및 시점별로 구분하여 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}([A]_j^i \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} + [B]_j^i \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} + \vec{C}_j^i) \\ &+ \frac{1}{4}([A]_{j+1}^i \frac{\vec{X}_{j+1}^i - \vec{X}_j^i}{\Delta t_j} + [B]_{j+1}^i \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_{j+1}^i}{\Delta s_i} + \vec{C}_{j+1}^i) \\ &+ \frac{1}{4}([A]_j^{i+1} \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_j^{i+1}}{\Delta t_j} + [B]_j^{i+1} \frac{\vec{X}_j^{i+1} - \vec{X}_j^i}{\Delta s_i} + \vec{C}_j^{i+1}) \\ &+ \frac{1}{4}([A]_{j+1}^{i+1} \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_j^{i+1}}{\Delta t_j} + [B]_{j+1}^{i+1} \frac{\vec{X}_{j+1}^{i+1} - \vec{X}_{j+1}^i}{\Delta s_i} + \vec{C}_{j+1}^{i+1}) \end{aligned} \quad \text{수식 4-42}$$

수식 4-42을 살펴보면 각각의 항은 순서대로  $(s_i, t_j), (s_i, t_{j+1}), (s_{i+1}, t_j), (s_i, t_{j+1})$ 에서의 지배방정식을 근사화하여 표현한 것임을 알 수 있다. 따라서 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\vec{Y}_j^i + \frac{1}{4}\vec{Y}_{j+1}^i + \frac{1}{4}\vec{Y}_j^{i+1} + \frac{1}{4}\vec{Y}_{j+1}^{i+1} = 0 \quad \text{수식 4-43}$$

수식 4-42와 수식 4-43을 통하여 케이블 요소에 대한 지배방정식은 두 절점  $s_i, s_{i+1}$ 와 두 시점  $t_j, t_{j+1}$ 에서의 지배방정식 근사치로 구성되어 있음을 알 수 있다. 뿐만 아니라, 케이블 요소에 대한 지배방정식 근사치는 각 절점 및 시점에서의 근사해로 연성되어 있음을 알 수 있다.

두 절점에서의 근사해가 연성되어 있는 문제를 해결하기 위하여, 두 절점의 야코비안 행렬로 조합된  $\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ 의 야코비안 행렬을 전체 시스템에 대한 야코비안 행렬로 조합하

여 풀이한다. 먼저 아래와 같이  $\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ 의 미지수  $\vec{X}_{j+1}^i$ 와  $\vec{X}_{j+1}^{i+1}$ 에 대하여 테일러 급수로 전개하여 뉴턴 랩슨 반복식을 수립한다.

$$\begin{aligned} & \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}(\vec{X}_j^i, \vec{X}_j^{i+1}, \vec{X}_{j+1}^i + \Delta\vec{X}_{j+1}^i, \vec{X}_{j+1}^{i+1} + \Delta\vec{X}_{j+1}^{i+1}) \\ &= \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \Delta\vec{X}_{j+1}^i \cdot \frac{\partial \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} \Big|_{(\vec{X}_{j+1}^i, \vec{X}_{j+1}^{i+1})} + \Delta\vec{X}_{j+1}^{i+1} \cdot \frac{\partial \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} \Big|_{(\vec{X}_{j+1}^i, \vec{X}_{j+1}^{i+1})} \end{aligned} \quad \text{수식 4-44}$$

수식 4-44을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$= \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + [J^i \quad J^{i+1}]_{(\vec{X}_{j+1}^i, \vec{X}_{j+1}^{i+1})} \times \begin{bmatrix} \Delta\vec{X}_{j+1}^i \\ \Delta\vec{X}_{j+1}^{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{수식 4-45}$$

수식 4-45의 야코비안 행렬을 이루는 각 성분을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$J^i = \frac{\partial \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial \vec{Y}_j^i}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} + \frac{\partial \vec{Y}_{j+1}^i}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} + \frac{\partial \vec{Y}_j^{i+1}}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} + \frac{\partial \vec{Y}_{j+1}^{i+1}}{\partial \vec{X}_{j+1}^i} \right\} \quad \text{수식 4-46}$$

$$J^{i+1} = \frac{\partial \vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial \vec{Y}_j^i}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial \vec{Y}_{j+1}^i}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial \vec{Y}_j^{i+1}}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial \vec{Y}_{j+1}^{i+1}}{\partial \vec{X}_{j+1}^{i+1}} \right\} \quad \text{수식 4-47}$$

따라서 야코비안 행렬의 행은 지배방정식  $\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$  을 이루는 방정식의 개수와 같은 10행

이며 열은 변수  $\vec{X}$ 의 개수와 같으나 두 절점으로 표현되기에  $2 \times 10$ 열이다. 즉, 정방행렬이 아니기에 역행렬이 존재하지 않는다. 이를 해결하기 위해 총  $n-1$ 개의 요소에 대한 테일러 급수를 수식 4-45와 같이 각각 전개한 후 전체 시스템의 야코비안 행렬을 조합한다.

시점  $t_j$ 에서 전체 시스템에 대한 변수와 함수 및 야코비안 행렬을 아래와 같이 정의하자.

$$\vec{X}_j = \begin{bmatrix} \vec{X}_j^1 \\ \vec{X}_j^2 \\ \vdots \\ \vec{X}_j^n \end{bmatrix}, \quad \Delta \vec{X}_j = \begin{bmatrix} \Delta \vec{X}_j^1 \\ \Delta \vec{X}_j^2 \\ \vdots \\ \Delta \vec{X}_j^n \end{bmatrix}$$

$$[J]_{j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} J^1 & J^2 & & & \\ & J^2 & J^3 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J^{n-1} & J^n \end{bmatrix}_{(\vec{X}_j, \vec{X}_{j+1})}$$

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} [\vec{Y}_j^1 + \vec{Y}_{j+1}^1 + \vec{Y}_j^2 + \vec{Y}_{j+1}^2] \\ [\vec{Y}_j^2 + \vec{Y}_{j+1}^2 + \vec{Y}_j^3 + \vec{Y}_{j+1}^3] \\ \vdots \\ [\vec{Y}_j^{n-1} + \vec{Y}_{j+1}^{n-1} + \vec{Y}_j^n + \vec{Y}_{j+1}^n] \end{bmatrix}$$

그에 따라  $t_{j+\frac{1}{2}}$ 에서 전체 시스템에 대한 뉴턴 램슨 반복식은 아래와 같이 표현된다.

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}} + [J]_{j+\frac{1}{2}} \times \Delta \vec{X}_j = 0 \quad \text{수식 4-48}$$

수식 4-48의 각 항의 의미를 생각해보자. 첫 번째 항은 각 요소에 대한 지배방정식의 근사화로 행에 따라 요소 지배방정식의 근사값을 배열하고 있기 때문에 요소의 개수에 따른  $10(n-1)$ 개의 행을 가지는 행벡터로 표현된다.

두 번째 항은 함수의 근사값에 대하여 선형화된 기울기만큼의 보정량을 의미한다. 두 번째 항의 첫 행렬은 전체 시스템의 야코비안 행렬로 첫 번째 항과 마찬가지로 행에 따라 각 요소의 야코비안 행렬을 배열하고 있다. 또한, 앞서 설명한 바와 같이 한 요소에 대한 야코비안 행렬은 두 절점으로 표현되기 때문에, 전체 시스템의 야코비안 행렬 역시 절점의 개수에 따라  $10n$ 개의 열을 가진다. 즉 야코비안 행렬은  $10(n-1) \times 10n$ 의 크기를 가지는 행렬로 표현된다. 두 번째 항의 두 번째 행렬은 테일러 급수에 의한 각 변수의 증분을 의미한다.

전체 시스템에 대한 테일러 급수를 전개해본 결과 시스템의 야코비안 행렬의 크기는  $10(n-1) \times 10n$ 로 정방행렬이 아님을 알 수 있다. 그러므로 야코비안 행렬을 정방행렬로 만들기 위해 10개의 식이 필요하며 양 끝단에서의 경계조건(Boundary Condition)을 통해 해결할 수 있다.

### 4.2.3. 경계조건의 적용

앞서 수식 4-48을 통해 전체 시스템에 대한 테일러 급수의 전개식을 아래와 같이 나타내었다.

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}} + [J]_{j+\frac{1}{2}} \times \Delta \vec{X}_j = 0 \quad \text{수식 4-49}$$

수식 4-48 중 전체 시스템에 대한 야코비안 행렬은  $10(n-1) \times 10n$ 이므로 뉴턴 랩슨 반복식을 수립하기 위해서는 10개의 타당한 경계조건을 적용해야한다.

먼저 앵커점에서의 경계조건에 대해 살펴보자. 앵커점에서의 케이블 끝단은 힌지의 조건이므로 모멘트가 영이다. 뿐만 아니라, 케이블의 변위가 없으므로 각 방향의 속도도 영임을 알 수 있다.

$$BC_1 : EI\Omega_n(0, t) = 0$$

$$BC_2 : EI\Omega_b(0, t) = 0$$

$$BC_3 : v_t(0, t) = 0$$

$$BC_4 : v_n(0, t) = 0$$

$$BC_5 : v_b(0, t) = 0$$



부이점에서는 케이블과 부체가 연결되는 점이므로 역시 모멘트는 영임을 알 수 있다. 또한 마찬가지로 케이블과 부체가 연결되는 점기에 케이블의 속도는 부체의 속도와 같음을 알 수 있다.

$$BC_6 : EI\Omega_n(L, t) = 0$$

$$BC_7 : EI\Omega_b(L, t) = 0$$

$$BC_8 : v_t(L, t) = V_{tb}$$

$$BC_9 : v_n(L, t) = V_{nb}$$

$$BC_{10} : v_b(L, t) = V_{bb}$$

위와 같이 경계조건에 관한 고려를 통하여  $10n \times 10n$ 의 야코비안 행렬을 갖는 테일러 급수의 전개식을 얻을 수 있으며 그를 이용하여 적합한 뉴턴 램슨 반복식을 수립할 수 있다.



#### 4.2.4. 증분의 보정과 수렴의 판별

두 시점에서의 근사해가 연성되어 있는 문제는, 각 시점에서 아래와 같은 알고리즘에 따라 풀이됨으로써 해결할 수 있다.

①  $\vec{X}_{j-1}$  과  $\vec{X}_j$ 를 통하여  $\vec{X}_{j+1}$ 의 값을 추정한다.

$$\text{추정값} : \vec{X}_{j+1} = \vec{X}_j + \Delta t_j \times \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_{j-1}}{\Delta t_{j-1}} \quad \text{수식 4-50}$$

② 수립한 뉴턴 랩슨 반복식에 추정값  $\vec{X}_{j+1}$ 을 적용하여 교정값  $\Delta \vec{X}_j$ 를 계산한다.

$$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}} + [J]_{j+\frac{1}{2}} \times \Delta \vec{X}_j = 0 \quad \text{수식 4-51}$$

③ 교정 후의 새로운 근사해를 구한다.

$$\vec{X}_{j+1} = \vec{X}_j + \nu \times \Delta \vec{X}_j \quad \text{수식 4-52}$$

④ 수렴조건을 이용하여 새로운 근사해에 대한 타당성을 판별한다. 조건을 만족할 경우 다음 시점으로 시간을 증분시키고 과정 ①부터 새로운 알고리즘을 시작한다. 그렇지 않을 경우 새로운 근사해를 이용하여 과정 ②부터 다시 반복한다.

$\vec{Y}_{j+\frac{1}{2}}$ 에 대하여 뉴턴 랩슨 반복법의 시행 시  $k$ 번째 시행에서의 전체 시스템 근사해를

열벡터로 아래와 같이 나타내자.



$$\vec{k}X_{j+1} = \begin{pmatrix} \vec{k}X_{j+1}^1 \\ \vec{k}X_{j+1}^2 \\ \vdots \\ \vec{k}X_{j+1}^n \end{pmatrix}$$

수식 4-53

만약  $k-1$ 번째 시행에서 근사해가 적합한 수렴조건을 만족하지 못하면  $k$ 번째의 시행을 통해 새로운 증분  $\Delta_k \vec{X}_{j+1}$ 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\Delta_k \vec{X}_{j+1} = - {}_k J_{j+1} \times {}_{k-1} \vec{Y}_{j+1}$$

수식 4-54

그를 통한 근사해  $\vec{k}X_{j+1}$ 는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\vec{k}X_{j+1} = {}_{k-1} \vec{X}_{j+1} + \nu \times \Delta_k \vec{X}_{j+1} \quad (\text{단, } k=1,2,3,\dots)$$

수식 4-55

이 때  $\nu(0 < \nu < 1)$ 는 증분의 보정계수로 각각의 반복스텝에 따라 더 나은 근사해를 구하기 위해 사용되어 진다. 이러한 보정계수  $\nu$ 는 다음의 몇 가지 고려사항을 통해 결정된다.

### (가) 총 오차 $\sigma$ 의 검토

뉴턴 랩슨 반복식에 의해 계산되어진 증분  $\Delta_k \vec{X}_{j+1}$ 는 근사적인 값이므로 오차를 포함하고 있다. 뉴턴 랩슨법의 시행 시 이러한 오차를 예측하여 수렴간격과 수렴속도 적절히 조절하는 것은 알고리즘을 더 정확하고 효율적으로 수렴에 도달하도록 한다. 그런데  $\vec{k}X_{j+1}$ 의 성분들은 개개의 물리적 의미를 지니고 있으므로 오차를 추측할 때 각각의 성분이 가지는 물리적 성질을 고려하여 오차를 산정할 필요가 있다. 따라서 총 오차  $\sigma_k$ 를 아래와 같이 정의한다.(Gobat et al., 2006)

$$\sigma_k = \frac{1}{nv \times nn} \sum_{n=1}^{nv} \sum_{i=1}^{nn} \frac{\Delta_k \vec{X}_{j+1}^i}{\chi_n} \quad \text{수식 4-56}$$

위 식에서  $nv$ 는 총 변수의 수,  $nn$ 은 총 절점의 수이며  $\chi_n$ 은  $\vec{X}_{j+1}$ 를 이루는 각각의 변수들을 대표하는 상수값이다. 즉, 총 오차  $\sigma_k$ 는  $k$ 번째 시행으로 구한 증분에 대하여, 각 변수별 대표상수와 각 변수별 증분의 비를 절점의 수로 나눈 평균을 의미한다.

$$\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \geq 1 \rightarrow \nu = \frac{\nu}{C_1} \quad \text{수식 4-57}$$

$$\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} < 1 \rightarrow \nu = \nu \times C_2 \quad (\text{여기서 } 1 < C_2 < C_1) \quad \text{수식 4-58}$$

본 논문에서는 위 식과 같이 총 오차  $\sigma_k$ 의 증감경향을 판단하여 보정계수  $\nu$ 를 적절히 조절함으로써 더 효율적으로 수렴에 도달하도록 하였다.

### (나) 조건수를 통한 검토

조건수는 임의의 연립방정식  $[A]\vec{X} = \vec{B}$ 에 대하여 그 수치적 풀이의 안전성을 판단하는 중요한 기준이 되는 개념이다. 이를 설명하기 위해 먼저 행렬과 벡터의 노름(norm)에 대하여 알아보자.

$n$ 개의 성분을 갖는 임의의 열벡터  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 에 대하여  $\vec{X}$ 의 노름  $\|\vec{X}\|_p$ 는 아래와 같이 정의한다.

$$\|\vec{X}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{수식 4-59}$$

여기서  $p$ 는 고정된 수이고  $p \geq 1$ 이다. 보통  $p=1$  혹은  $p=2$ 이고 3번째노름으로  $\|\vec{X}\|_\infty$ 를 사용하는데, 이들은 각각 아래와 같이 정의된다.

$$\|\vec{X}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \text{수식 4-60}$$

$$\|\vec{X}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{수식 4-61}$$

$$\|\vec{X}\|_\infty = \max|x_j| \quad \text{수식 4-62}$$

크기가  $n \times n$ 인 임의의 정방행렬  $[A]$ 에 대하여 행렬노름  $\|A\|$ 은 아래와 같이 정의한다.

$$\text{Frobenius 노름} : \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad \text{수식 4-63}$$

$$\text{열합노름} : \|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{수식 4-64}$$

$$\text{행합노름} : \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{수식 4-65}$$

임의의 연립방정식  $[A]\vec{X} = \vec{B}$ 에 대하여 벡터노름과 행렬노름을 이용하여 아래와 같이 조건수를 정의한다.

$$\chi(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| \quad \text{수식 4-66}$$

이 조건수는 항상 1보다 크거나 같으며, 조건수가 클수록 근사해의 부정확성이 추후 해의 수렴에 큰 영향을 미친다. 또한 계산의 반복시행에 따라 조건수가 작아지면 방정식은 안정화되고 그 반대의 경우에는 불안정해진다. 그러므로 반복법 시행에 따른 조건수의 변화를 통해 방정식의 안정성을 검토하고 아래와 같이 보정계수를 조절한다.

$$\frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} \geq 1 \rightarrow \nu = \frac{\nu}{C_3} \quad \text{수식 4-67}$$

$$\frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} < 1 \rightarrow \nu = \nu \times C_4 \quad (\text{여기서 } 1 < C_4 < C_3) \quad \text{수식 4-68}$$

본 논문에서는 위와 같은 두 가지의 검토를 통해서 증분을 보정하므로써 더 효율적으로 수렴할 수 있도록 한다.

## 5. 예제해석 및 검증

본 장에서는 예제의 해석을 통해 수치해석 프로그램을 검증하고 계류부이의 계류삭에 대한 역학적 특성을 파악하고자 한다.

### 5.1. 정적 해석 결과 및 검토

본 절에서는 정역학적 해석 결과를 통해 수렴과정 동안 나타나는 수렴 판별을 위한 검토 사항의 변화를 살펴봄으로써 뉴턴 랩슨법의 수렴과정에 관해 알아본다.

먼저 예제해석에 사용된 모델의 물성치와 정상적 환경조건은 아래와 같다.

길이	120 m
직경	0.05 m
형상	원형
수중중량	300 N/m
탄성계수	200 GN/m <sup>2</sup>
법선 항력계수	1.5
접선 항력계수	0.01

Table 4 계류삭의 물성치

수심	80 m
해수밀도	1024 kg/m <sup>3</sup>
해류의 개수	1
해류의 속도	1~5 m/s
속도의 연직분포 형상차수	1
부이의 수평하중	30000 N

Table 5 해양의 정상적 환경조건

노드 개수	25
수렴한계값	0.001

Table 6 해석 조건

앞서 수렴의 판별을 위해 공차 간의 비를 이용한 비판정법에 대해 설명하였다. Fig 8 은 이런 공차 간의 비가 반복 횟수의 증가에 따라 어떻게 변화하는지를 보여준다. 반복 횟수가 증가함에 따라 공차 간의 비가 점차 1로 안정되어 간다는 것을 알 수 있다. 즉 수치해석 과정이 점차 안정되며 수렴하는 과정 중에 있다는 것을 알 수 있다. 그 후에 반복이 계속되면서 어느 시점부터 계산이 불가능한 지점이 나온다. 이는 공차가 매우 0에 근접하기 때문에 공차 간의 비를 수치적으로 계산하기 불가능하기 때문이며 이 반복 횟수에서 충분히 수렴에 도달했다고 판단할 수 있다.

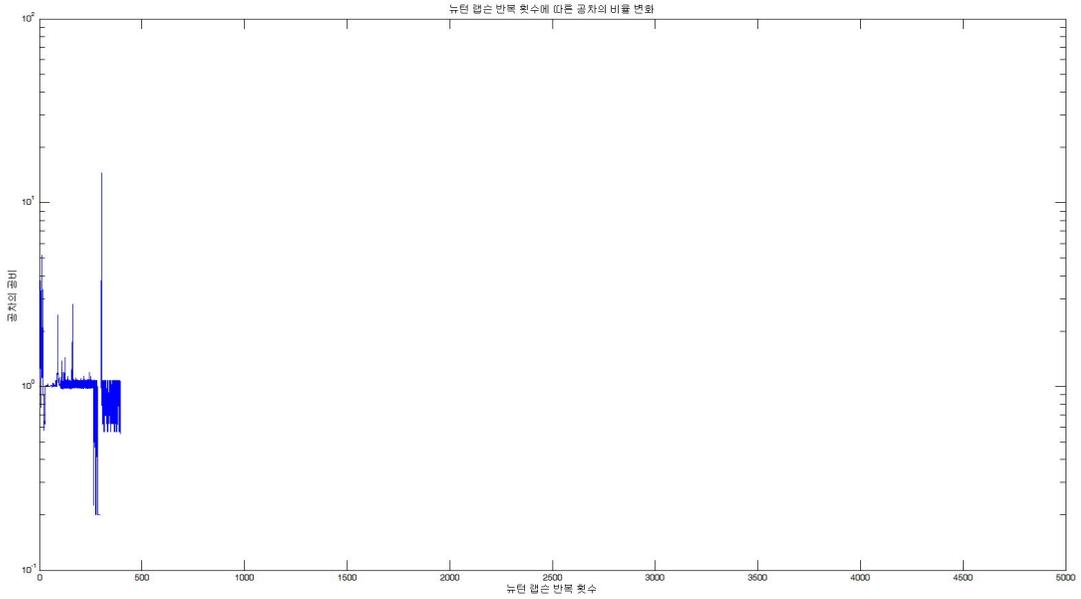


Fig. 5-1 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 공차의 비율 변화

Fig 9는 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 총 오차  $\sigma$ 의 변화를 보여주고 있다. 초기에 비해 반복 횟수가 증가할수록 그 크기는 점차 줄어들며 매우 작은 값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 오차가 매우 작은 값으로 수렴하는 것은 수치해석을 통한 근사해가 점차 정해에 가까워진다는 것을 의미한다.

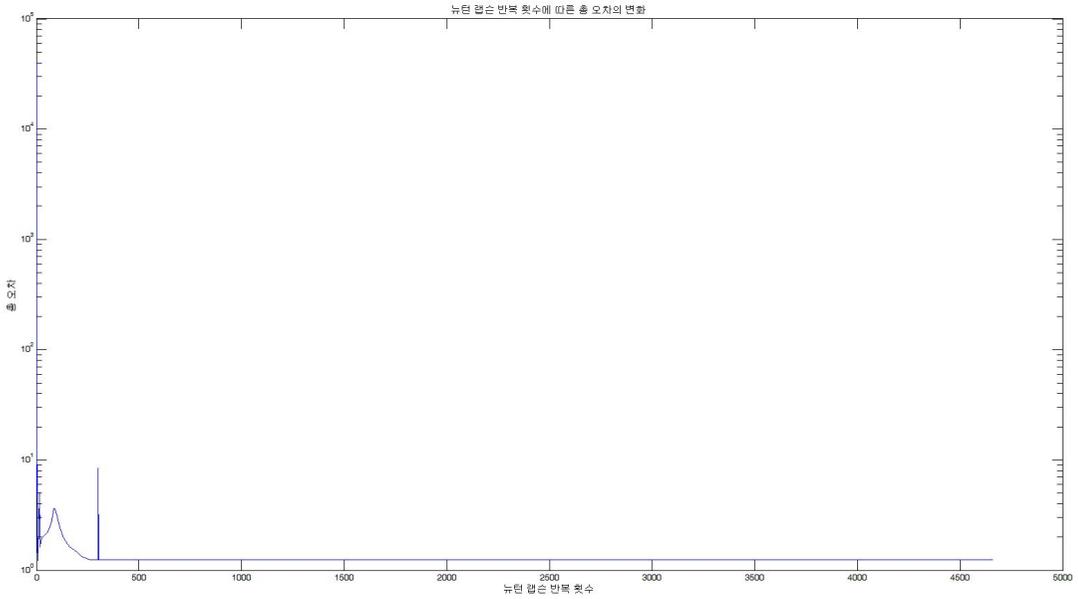


Fig. 5-2 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 총 오차의 변화

Fig 10은 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 보정계수의 변화를 보여준다. 보정계수는 매 반복마다 증분을 보정해주는 기능을 가지고 알고리즘을 점차 안정화시키는 역할을 한다. 보정계수 역시 반복 횟수가 증가함에 따라 점차 일정한 수치로 안정화됨을 알 수 있다.

Fig 8과 Fig 9, Fig 10을 비교해보면 반복 횟수에 따라 변화하는 경향이 매우 유사함을 알 수 있다. 이를 통해 수렴되어가는 과정을 파악할 수 있다.

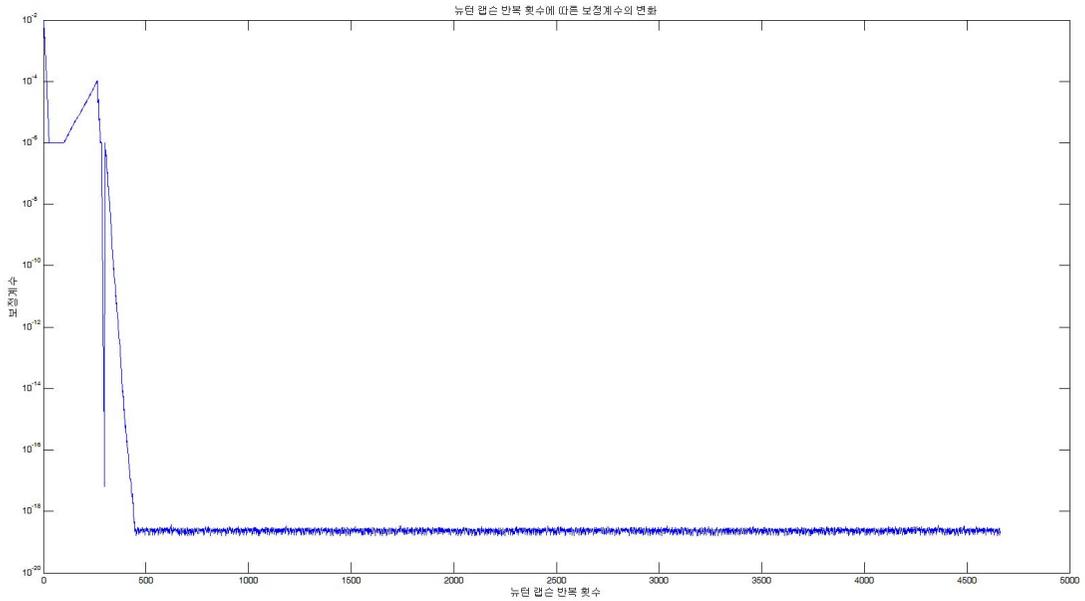


Fig. 5-3 뉴턴 랩슨 반복 횟수에 따른 보정계수의 변화

Fig 11과 Fig 12는 반복 횟수에 따라 부이점 및 앵커점에서의 장력이 점차 수렴해가는 모습을 보여준다. 초기의 수렴해가는 과정을 보다 자세히 보기 위해 반복 횟수를 로그스케일로 표현하였다. 최종적으로 수렴한 앵커점에서의 장력은 약 17500N, 부이점에서의 장력은 약 72000N임을 확인할 수 있다. 정적 해석에서와 같이 앵커점에서의 장력은 부이점에서의 장력보다 작음을 알 수 있다. 대략적으로 부이점에서의 장력에 관해 검증해보자. 부이점에서 장력은 연직방향으로의 케이블 자중 36000N과 부이점에서 수평횡하중 30000N 그리고 케이블 전체에 작용하는 해류 항력의 합과 평형을 이루어야 한다. 자중과 수평횡하중의 벡터합은 약 46861.5N이고 전체 수심에 대한 케이블의 항력 크기는 대략적으로 약 16500N이다. 부이점에서의 장력은 이 두 합력과 비슷하거나 커야하므로 타당함을 알 수 있다.

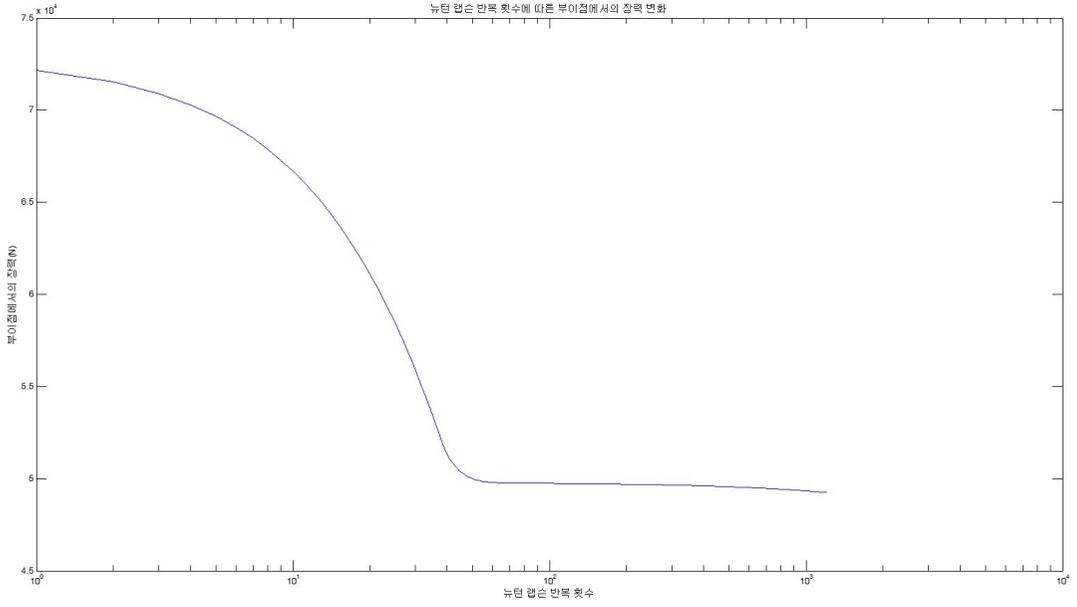


Fig. 5-4 뉴턴 랩스 반복 횟수에 따른 부이점에서의 장력 변화

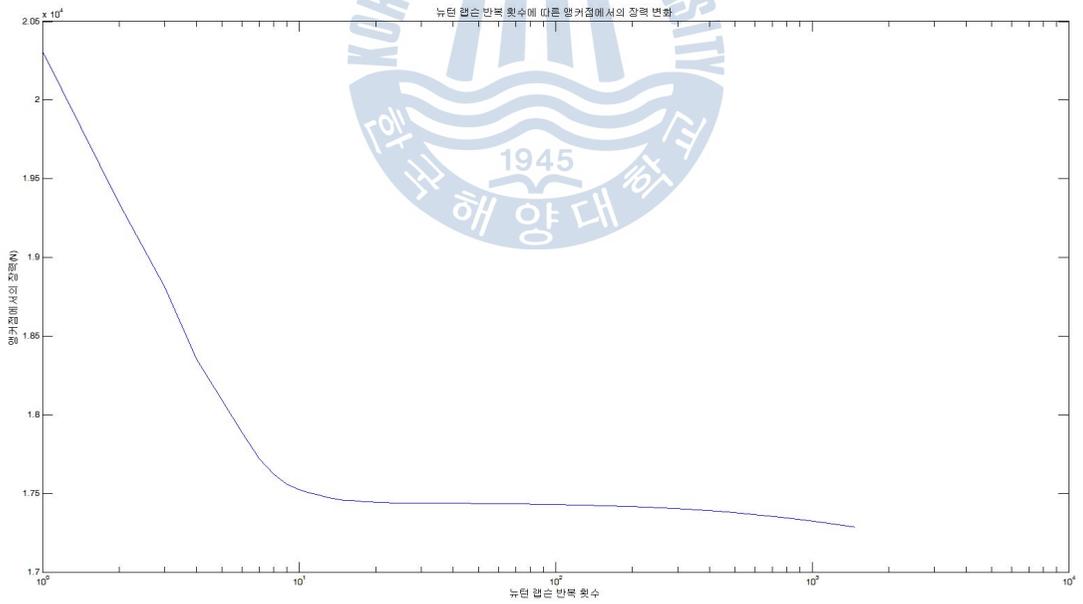


Fig. 5-5 뉴턴 랩스 반복 횟수에 따른 앵커점에서의 장력 변화

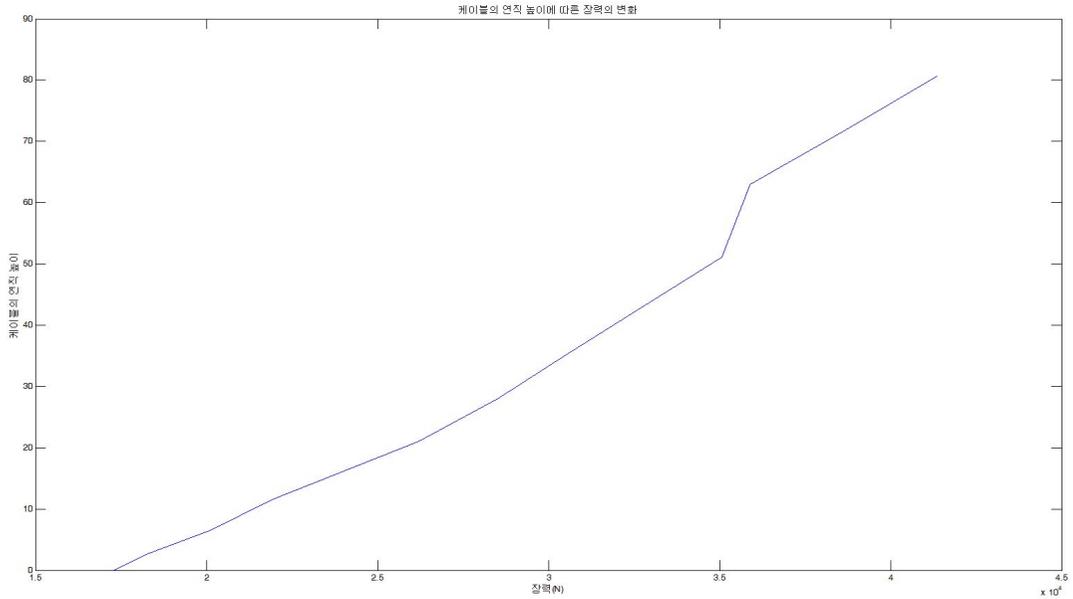


Fig. 5-6 케이블의 연직 높이에 따른 장력의 변화

Fig 13는 정역학적 해석을 통해 구한 각 절점에서의 장력을 보여준다. 앵커점에서부터 연직 높이에 따른 장력의 변화를 한눈에 볼 수 있다. Fig 11과 Fig 12에서 나타난 앵커점에서의 장력이 Fig 13에서도 동일하게 확인된다. 또한 앵커점에서부터 상부로 올라갈수록 장력이 거의 선형적으로 증가함을 알 수 있는데 이는 상부로 갈수록 케이블의 무게만큼 장력이 증가하기 때문이며 그 와중에 조금씩 기울기가 달라지는 것은 깊이 따라 해류의 유속이 변하기 때문임을 알 수 있다.

## 5.2. 동적 해석 결과 및 검토

본 절에서는 5.1에서 검토한 정상상태의 결과를 바탕으로 다양한 주기와 진폭의 파랑 조건에서 부이 계류삭을 해석하여 부이 계류삭이 가지는 동역학적 특성에 대해 파악하고자 한다.

먼저 5.2.1에서는 시간영역에 대한 프로그램의 수렴을 검증하기 위해 작은 형상의 모델을 해석하였다. 그를 통해 프로그램이 수렴함을 확인할 수 있었으며 그 후, 5.2.2에서는 두 가지 주기의 경우와 세 가지 가진진폭의 경우에 대해 교차하는 6가지의 경우를 해석하여 상단의 가진조건에 따른 계류삭의 동적 특성을 분석하였다.

### 5.2.1. 프로그램 검증을 위해 작은 형상의 모델에 대한 해석 수행

해석을 위해 가정한 해양 환경조건은 수심 3m의 매우 얇은 해역이며 해수면 아래 초속 1m/s의 일정한 해류가 작용하여 이 때 부이에 작용하는 해류에 의한 정상적 수평 하중은 3000N이라 정하였다. 아래 Table 8은 이런 해양 환경조건을 목록으로 나타내었다.

수심	3 m
해수밀도	1024 kg/m <sup>3</sup>
해류의 개수	1
해류의 속도	1 m/s
속도의 연직분포 형상차수	1
부이의 수평하중	3000 N

Table 7 해양의 정상적 환경조건

또한 Table 9와 같이 길이 5m, 직경 0.05m의 원형 부이 케이블에 대해 해석하였으며 이 케이블의 수중중량은 300N/m<sup>2</sup>, 탄성계수는 200GN/m<sup>2</sup>의 일반적인 Steel이라 가

정하였다. 이 케이블의 법선 항력계수는 1.5, 접선 항력계수는 0.01이며 부가질량계수는 1이라 정하였다. 해석을 위해 케이블을 길이 0.5m의 요소로 나누어 총 10개의 요소, 11개의 노드에 관하여 계산을 수행하였다.

길이	5 m
직경	0.05 m
형상	원형
수중중량	300 N/m
탄성계수	200 GN/m <sup>2</sup>
법선 항력계수	1.5
접선 항력계수	0.01

Table 8 계류삭의 물성치

이러한 환경조건을 가진 계류삭의 상단에 진폭 0.75m, 가진주기 1sec를 갖는 수평가진을 작용시켰다. Table 10은 이러한 상단 가진조건을 나타낸다.

가진 방향	수평
가진 진폭	0.75 m
가진 주기	1 sec

Table 9 상단 가진조건

또한 Table 11은 프로그램 해석을 위해 결정한 길이 및 시간 요소와 수렴한계값을 나타낸다.

노드 개수	11
시간 증분	0.05
수렴한계값	0.0001

Table 10 해석조건

Fig 14는 시간에 따른 장력의 변화를 보여준다. 위 결과를 살펴보면, 장력의 변화 주기는 대체로 가진주기와 일치하지만 다소 불규칙한 특성도 있음을 알 수 있다. 이는 케이블의 길이, 무게, 외력 등의 조건에 비해 큰 가진이 작용하여 다소 불안정하기 때문으로 사료된다.

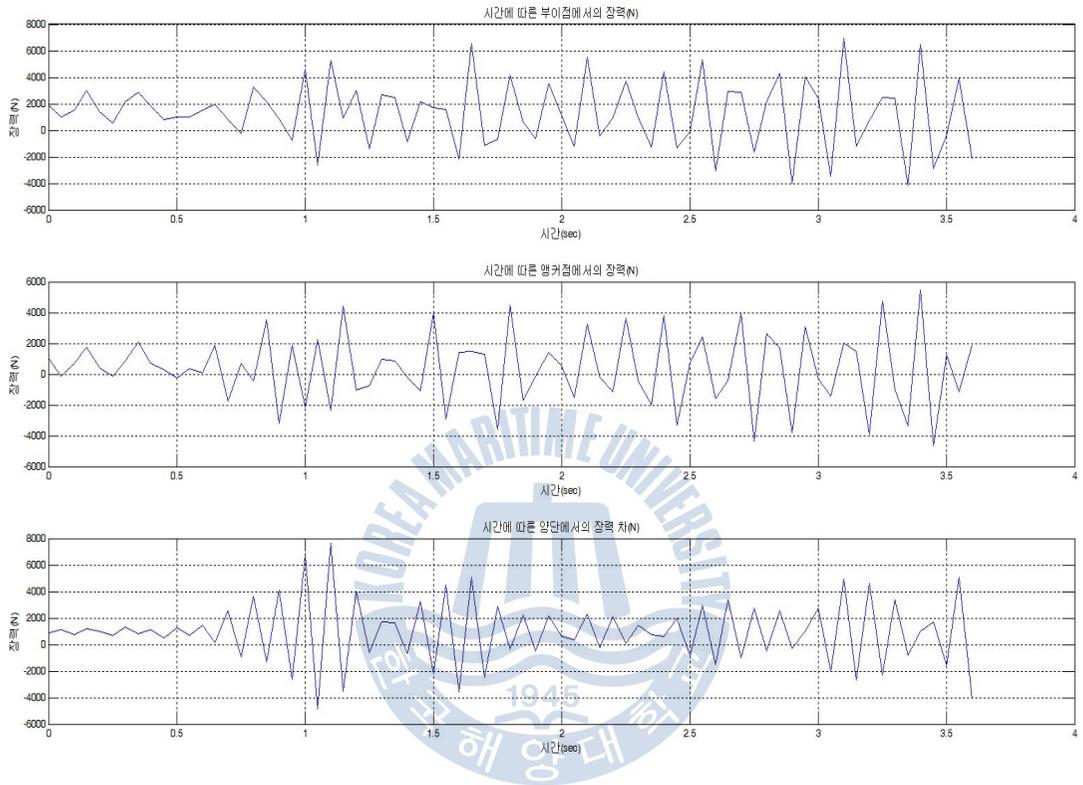


Fig. 5-7 시간에 따른 부이점 장력(위), 앵커점 장력(중간), 양단의 장력 차(아래)

Fig 15~18은 시간에 따른 케이블의 거동에 대해 보여준다. Fig 15는 3차원 정면도로써 케이블의 전체적인 거동을 나타내며 Fig 16, Fig 17, Fig 18은 각각 YZ평면, XZ평면, XY평면에서 볼 수 있는 케이블의 거동을 나타낸다.

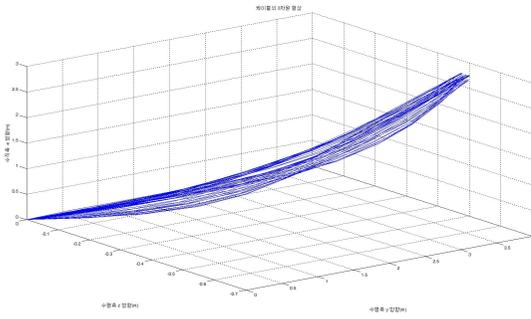


Fig. 5-8 부이 계류사의 3차원 거동

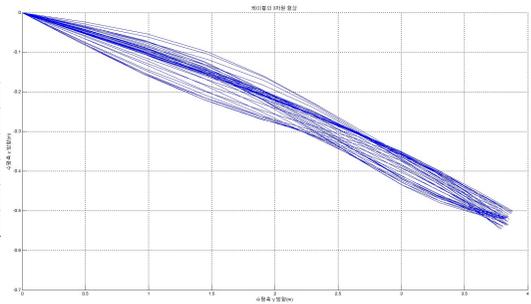


Fig. 5-9 계류사의 YZ평면 거동

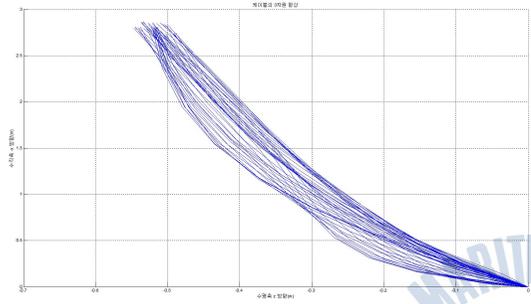


Fig. 5-10 계류사의 XZ평면 거동

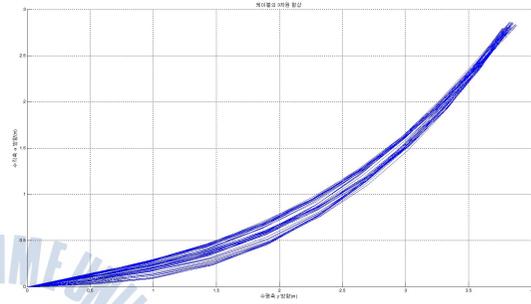


Fig. 5-11 계류사의 XY평면 거동



### 5.2.2. 상부 가진조건에 따른 계류삭의 특성 파악

본 논문에서는 동일한 환경조건과 계류삭에 대하여 서로 다른 상부 가진조건을 가했을 때의 결과를 비교하여 부이 계류삭의 동적 특성에 대해 알아보았다.

해석을 위해 가정한 해양 환경조건은 수심 80m의 해역이며 해수면 아래 10m까지 초속 1m/s의 해류가 작용하여 이 때 부이에 작용하는 해류에 의한 정상적 수평하중은 15000N이라 정하였다. 아래 Table 12는 이런 해양 환경조건을 목록으로 나타내었다. 또한 Table 13과 같이 길이 120m, 직경 0.05m의 원형 부이 케이블에 대해 해석하였으며 이 케이블의 수중중량은  $300\text{N/m}^2$ , 탄성계수는  $200\text{GN/m}^2$ 의 일반적인 Steel이라 가정하였다. 법선 항력계수는 1.5, 접선 항력계수는 0.01이며 부가질량계수는 1을 사용하였다. 그리고 길이 및 시간요소의 크기와 수렴한계값은 앞의 Table 11과 같다.

수심	80 m
해수밀도	$1024 \text{ kg/m}^3$
해류의 개수	1
해류의 속도	1 m/s
속도의 연직분포 형상차수	1
부이의 수평하중	15000 N

Table 11 해양의 정상적 환경조건

길이	120 m
노드 개수	25
직경	0.05 m
형상	원형
수중중량	300 N/m
탄성계수	$200 \text{ GN/m}^2$
법선 항력계수	1.5
접선 항력계수	0.01
부가질량계수	1

Table 12 계류삭의 물성치

본 논문에서는 Table 14에서와 같이 주기와 진폭에 따라 서로 다른 6가지 케이스에 대하여 해석을 수행, 그 결과를 비교 및 분석함으로써 부이용 계류선의 동적 특성을 파악하고자 한다.

	0.25m	0.50m	0.75m
9sec	case 1	case 2	case 3
5sec	case 4	case 5	case 6

Table 13 상부 가진조건에 따른 케이스의 분류

아래 Fig 19~Fig 36은 각 케이스별 부이점 및 앵커점에서의 시간에 따른 장력 변화와 길이에 따른 장력의 분포를 나타낸 그래프이다.

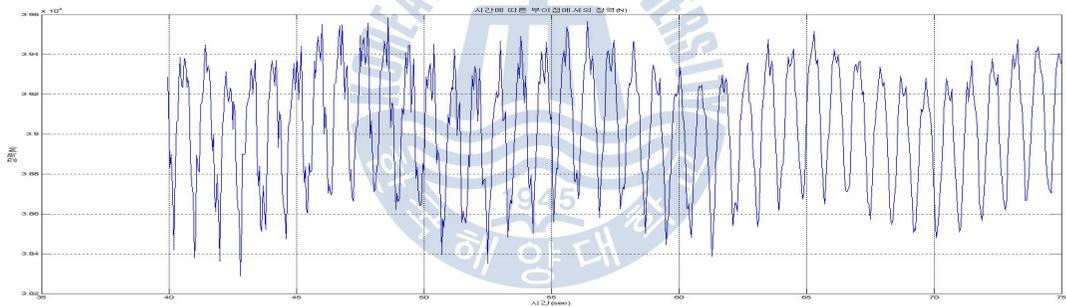


Fig. 5-12 case 1의 부이점 장력 변화

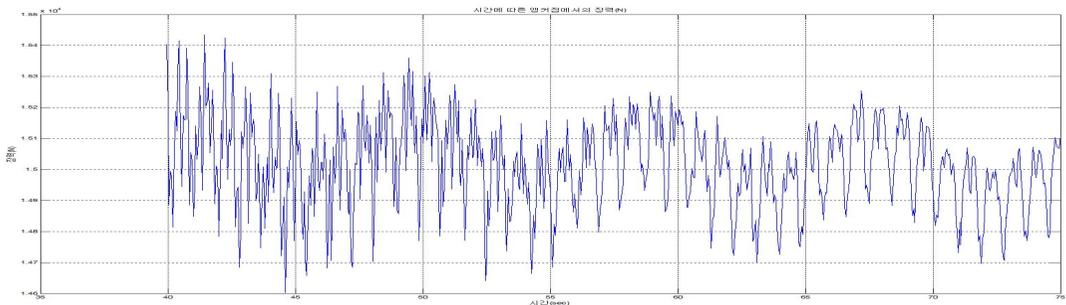


Fig. 5-13 case 1의 앵커점 장력 변화

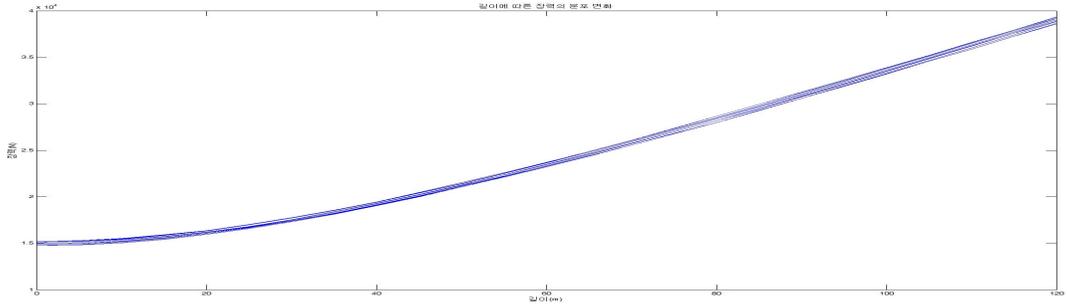


Fig. 5-14 case 1의 길이에 따른 장력 분포 변화

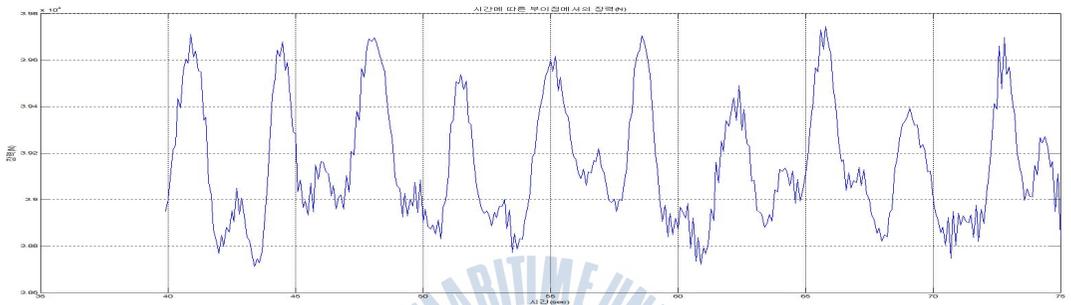


Fig. 5-15 case 2의 부이점 장력 변화

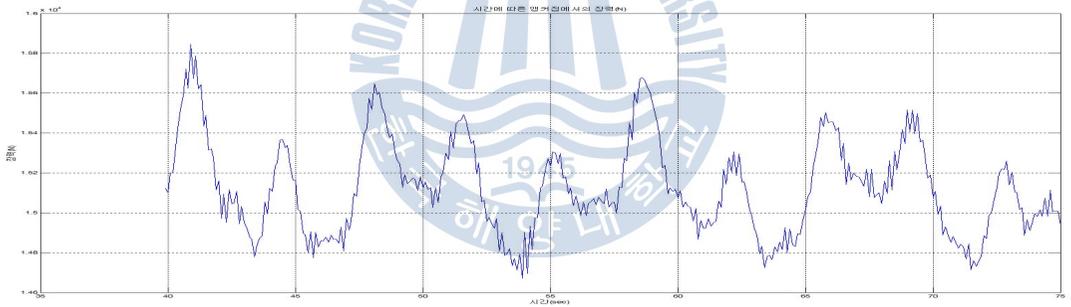


Fig. 5-16 case 2의 앵커점 장력 변화

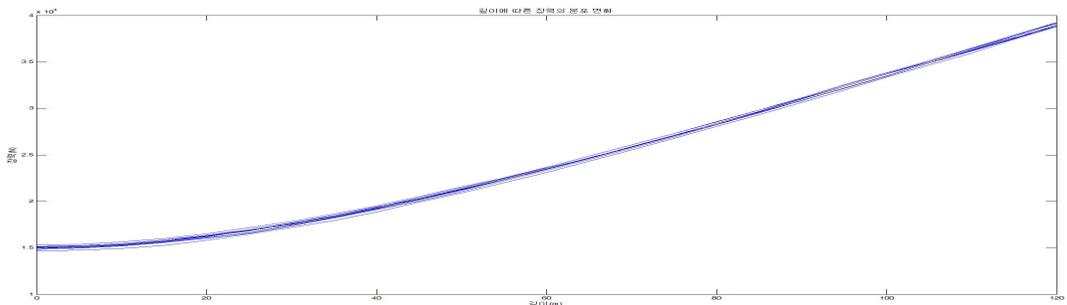


Fig. 5-17 case 2의 길이에 따른 장력 분포 변화

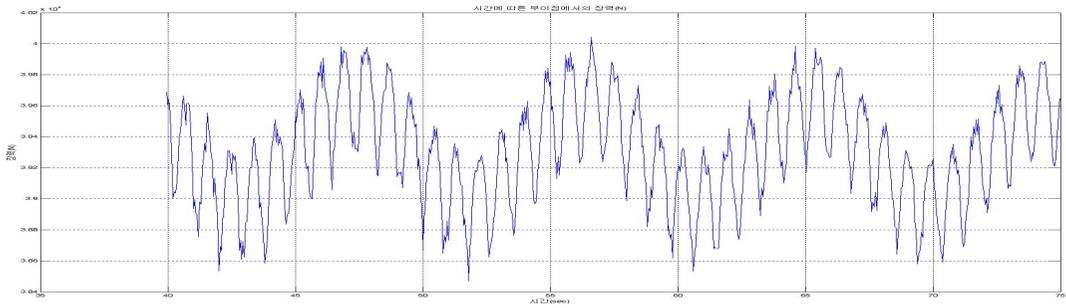


Fig. 5-18 case 3의 부이점 장력 변화



Fig. 5-19 case 3의 앵커점 장력 변화

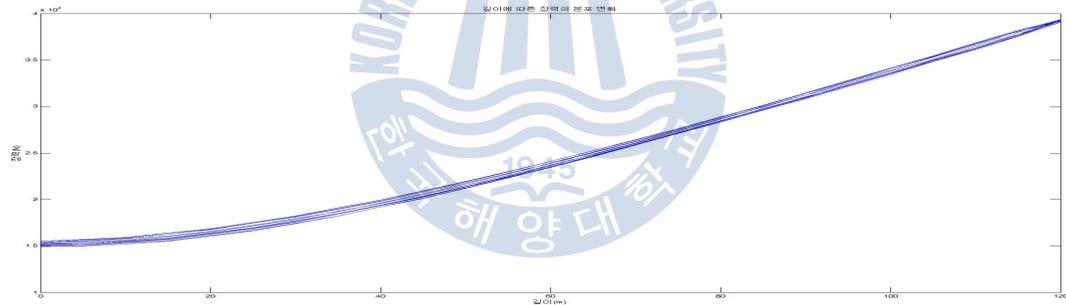


Fig. 5-20 case 3의 길이에 따른 장력 분포 변화

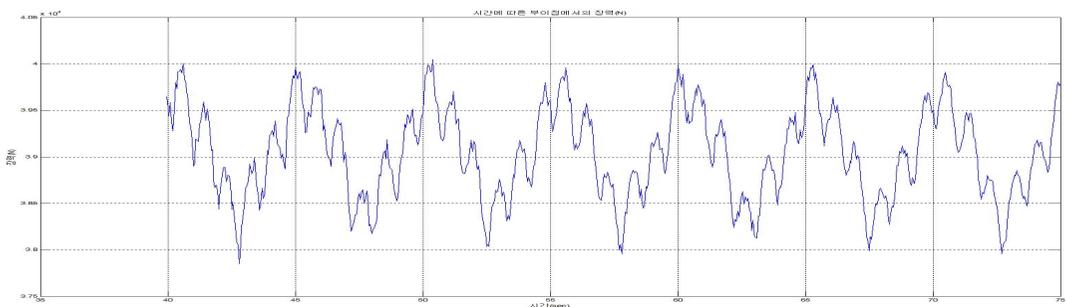


Fig. 5-21 case 4의 부이점 장력 변화

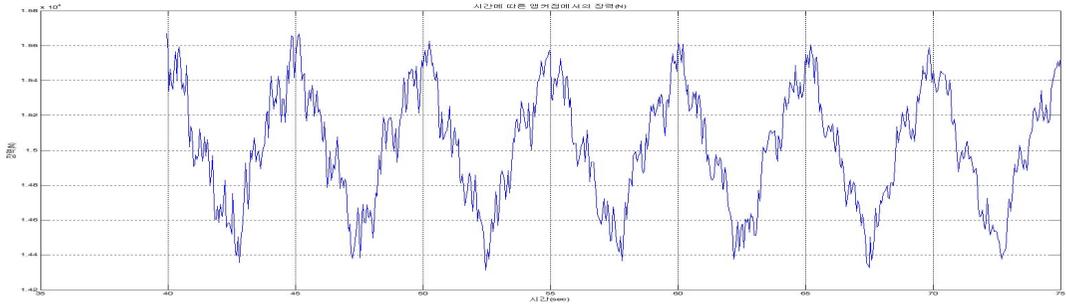


Fig. 5-22 case 4의 앵커점 장력 변화

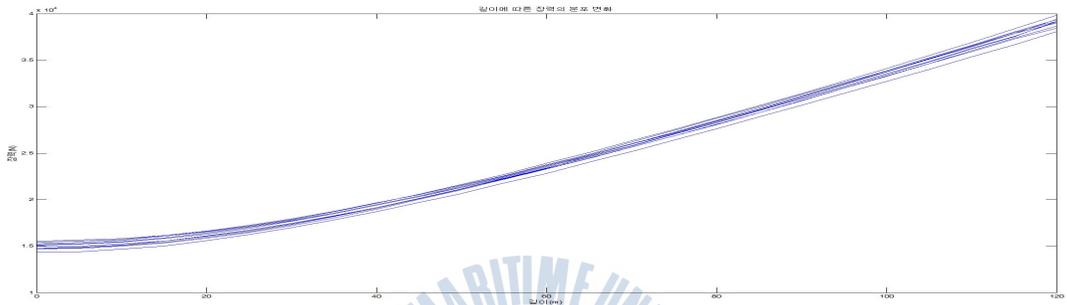


Fig. 5-23 case 4의 길이에 따른 장력 분포 변화

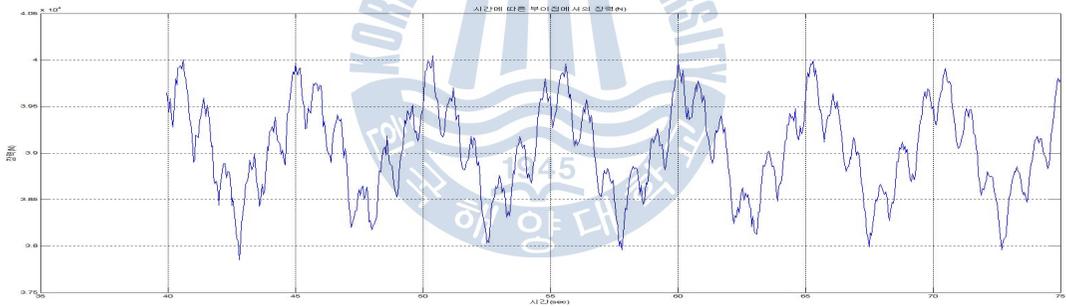


Fig. 5-24 case 5의 부이점 장력 변화

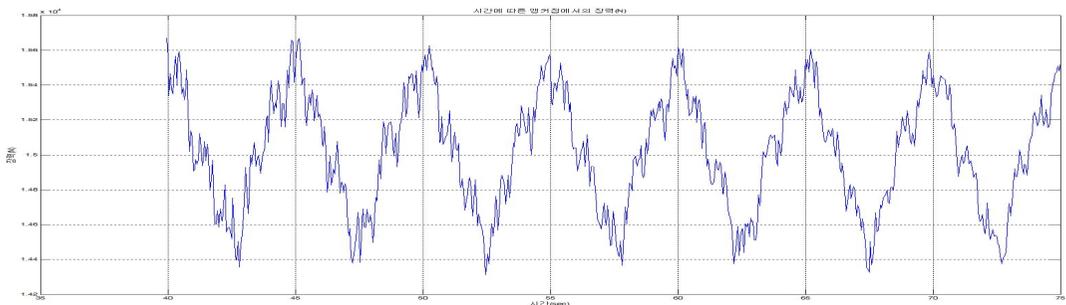


Fig. 5-25 case 5의 앵커점 장력 변화

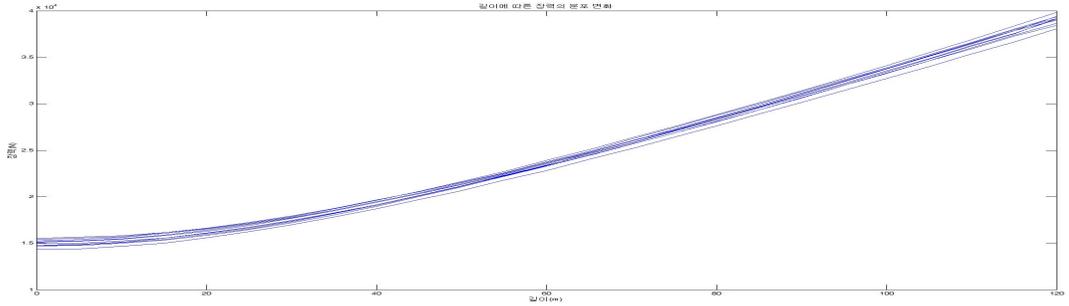


Fig. 5-26 case 5의 길이에 따른 장력 분포 변화

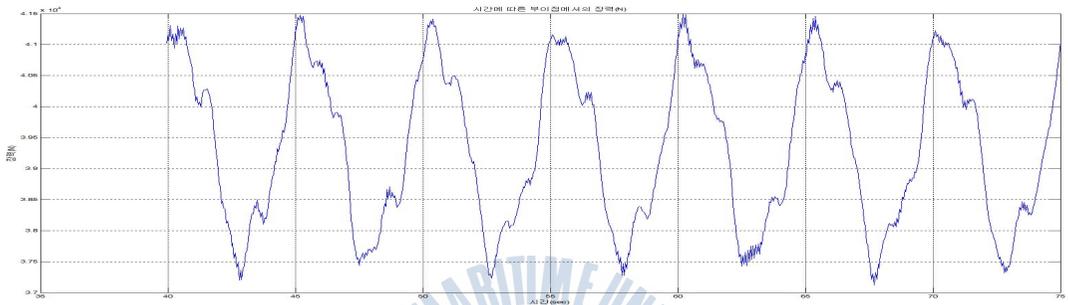


Fig. 5-27 case 6의 부이점 장력 변화

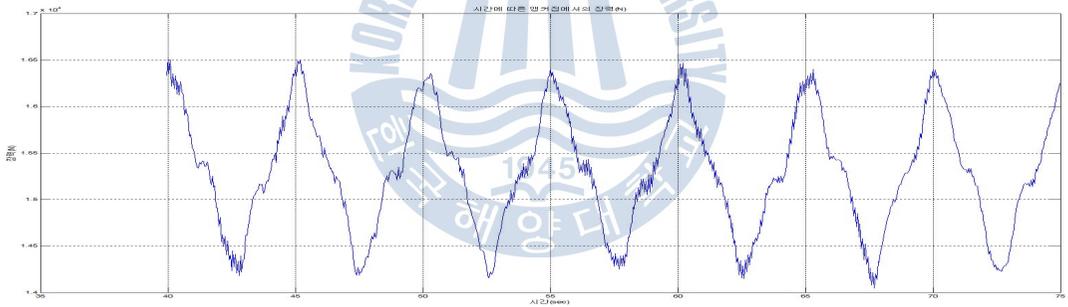


Fig. 5-28 case 6의 앵커점 장력 변화

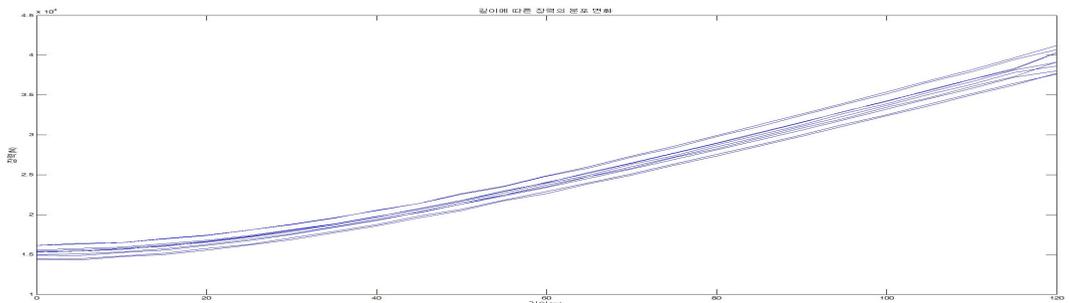


Fig. 5-29 case 6의 길이에 따른 장력 분포 변화

동일한 가진주기에 대하여 가진진폭이 다를 때, 부이점에서의 장력 변화 그래프(Fig 19, 22, 25과 Fig 28, 31, 34)를 비교해보자. 장력의 변화진폭은 가진진폭에 비례함을 알 수 있다. 이것은 앵커 근방에 위치한 하부 체인이 해저면에 가라앉지 않을 정도로 팽팽한 상태를 유지하여 상부 가진에 의한 동적효과가 크게 나타나기 때문으로 사료된다. 또한 시간에 따라서 비선형적으로 나타나고 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 동일한 가진주기에 대하여 가진진폭이 다를 때, 앵커점에서의 장력 변화 그래프(Fig 20, 23, 26과 Fig 29, 32, 35)를 살펴보자. 부이점과 비교하여 장력의 크기가 작음을 알 수 있는데 부이점과는 달리 앵커점에서는 계류삭 자중의 영향을 받지 않기 때문이다. 그러나 장력의 변화 경향은 부이점에서와 유사하게 나타난다.

동일한 가진진폭에 대하여 가진주기가 다를 때 부이점에서의 장력 변화 그래프((Fig 19, 22과 Fig 22, 31 과 Fig 25, 34)를 비교해보면, 부이 연결점에서 가진주기에 따른 장력의 변화 진폭은 가진 주기에 반비례함을 알 수 있다. 즉, 같은 가진진폭일 때 가진 주기가 작을수록 더 큰 장력의 변화가 발생한다. 주기는 주파수와 반비례하므로 장력의 변화 진폭은 가진 주파수에 비례하는 경향이 나타나며 이는 김현조 외(2002)에서 나타난 실험결과와 유사하게 일치함을 알 수 있다.

한 주기를 10등분하여 각 시점에서 길이에 따른 장력값을 겹쳐 그림으로써 계류삭의 전체 길이에 따른 장력값의 변화를 알아보았다.(Fig 21, 24, 27, 30, 33, 36) 이 그래프들을 살펴보면 부이점과 앵커점에서 장력의 변화진폭을 손쉽게 비교할 수 있는데, 장력의 변화진폭은 부이점과 앵커점에서 크게 다르지 않음을 알 수 있다. 특히 case 2 와 case 3의 경우 장력의 변화진폭이 부이점에서보다 앵커점에서 더 크게 나타났다. 이를 통해 부이 계류삭의 피로파괴를 유발할 수 있으므로 부이 연결점과 앵커 연결점의 근방에서 피로파괴에 대한 대비를 충분히 하여야 함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 수치해석적 연구를 바탕으로 부이용 해양 케이블에 대한 정적 및 동적 구조해석을 수행하여 부이 계류삭의 동역학적 특성을 파악하고자 하였다.

먼저 고정된 전체좌표계에 대하여 국부좌표계를 곡선좌표계로 설정하여 케이블의 운동에 관해 해석하였다. 또한 벡터의 미분에 대한 좌표계 간의 변환관계에 대해 설명하였고 각속도와 곡률을 국부좌표계 상으로 정의하였다.

해양 케이블을 역학적으로 해석하기 위하여 등체적 변형에 관하여 근사화하였고 해양 케이블에 작용하는 각종 하중 요소들을 고려하여 지배방정식을 수립하였다. 특히, 케이블에서 복원력의 역할을 하는 장력이 매우 작아지면 수치적으로 해를 구하기 어려우며 부이 계류삭의 앵커점 부근에서 종종 이러한 저장력 현상이 발생하므로 본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 케이블의 굽힘강성을 고려하여 저장력 현상이 발생할 때에도 해를 구할 수 있도록 하였다.

또한 유한차분법을 이용하여 지배방정식이 케이블의 절점에서 뿐만 아니라 케이블 요소에서도 타당하게 적용될 수 있도록 하였다. 뿐만 아니라 매우 복잡한 비선형 미분방정식인 지배방정식을 차분을 통해 대수방정식으로 변환시킴으로써 대수방정식에 적용되는 수치적 풀이법을 적용할 수 있도록 하였으며 차분을 통해 시간 및 공간요소를 이루는 두 시점 및 절점 간의 관계를 파악함으로써  $t_j$ 에서의 근사해를 통해  $t_{j+1}$ 에서의 근사해를 구할 수 있도록 하였다.

차분을 통해 대수방정식으로 표현된 지배방정식의 수치적 해를 얻기 위해 경계조건을 포함한 야코비안 행렬을 구하여 뉴턴 랩슨법에 적용하였다. 뉴턴 랩슨법을 이용하여 수치적 해를 구하는 과정에서 총 오차와 조건수를 파악하여 보정해줌으로써 수렴경로가 더 효율적하도록 하였다.

이를 바탕으로 다양한 상부 가진조건 하에서 부이 계류삭을 해석함으로써 부이 계류삭이 가지는 역학적 특성을 파악하였다.

그 결과, 장력의 변화 진폭은 상단 가진진폭에 비례하는 경향을 띠는 것을 알 수 있었다. 또한 가진주기에 반비례, 가진 주파수에 비례하는 경향이 있음을 알 수 있었다. 즉, 주기가 짧고 파장과 진폭이 큰 파랑조건 하에서 파단 가능성이 더 크므로 부이 계류삭을 설계할 때 이런 점을 고려하여야 할 것이다.

길이에 따른 장력의 변화를 살펴보면, 상단의 부이 연결점에서 뿐만 아니라 하단의 앵커 연결점에서도 장력의 변화진폭이 클 수 있음을 알 수 있다. 이는 부이 계류삭의 피로파괴를 야기할 수 있으므로 부이 연결점 뿐만 아니라 앵커 연결점 근방에서도 피로파괴를 고려한 설계가 필수적임을 의미한다.

추후에는 보다 더 실제적인 계류삭의 해석을 위해 복합단면 및 복합재질의 케이블에 대한 해석 기법과 앵커 근방에서 발생하는 해저면과 계류삭과의 마찰에 관한 연구가 수행되어야 할 것이다. 또한 보다 더 안전한 설계를 위해 상부 가진에 대한 공진현상과 해류에 의한 계류삭의 와동을 해석하기 위한 연구도 수행되어야 할 것이다.



## 참 고 문 헌

- [1] Dowling, A.P., 1998, "The Dynamics of Towed Flexible Cylinders Part 1. Neutrally Buoyant Elements", J. of Fluid Mechnics, Vol. 187.
- [2] Grosenbaugh, M.A., 1993, "Low-Tension Cable Dynamics and Prediction of Vortex Induced Vibrations of acoustic Array Cables", WHOI report.
- [3] Irvine, H.M., 1981, "Cable Structures", MIT Press
- [4] Jung, D.H., "A Study on Three Dimensional Dynamic Analysis of Low-Tension Marine Cables", 2002.
- [5] Leonard, J.W. and Recker, W.W., 1972, "Nonlinear Dynamics of Cables with Low Initial Tension", J. of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, pp. 293-309.
- [6] Millinazzo, F., Wilkei, M., and Latchman, S.A., 1987, "An efficient Algorithm for Simulating the Dynamics of Towed Cable Systems", Ocean Engineering, Vol. 14, No. 6, pp. 513-526.
- [7] Patel, M.H., 1989, "Dynamics of Offshore Structures", Butterworth&Co. Ltd.
- [8] Shin, M.G., "A Study on Design Technique and Characteristic Analysis of Ocean Observation Buoys ", 2004.
- [9] Triantafyllow, M.S. and Triantafyllou, G.S., 1991, "The Paradox of the Hanging String : An Explanation using Singular Petrubations", The J. of Sound and Vibration, Vol. 148, No. 2.
- [10] Triantafyllow, M.S. and Howell, C.T., 1992, "Nonlinear Impulse Motions of Low Tension Cables", J. of Engineering Mechnics (ASCE), Vol. 118, No 4.
- [11] Triantafyllow, M.S. and Howell, C.T., 1994, "Dynamic Response of Cables Under Negative Tension : An Ill Posed Problem", J. of Sound and Vibration, Vol. 173, No. 4.
- [12] 김현조, 홍사영, 홍섭, 조석규, 2002, "강제동요 시험을 이용한 모형 계류삭의 동적 응답연구", 한국해양공학회 2002년도 추계학술대회 논문집, pp. 134-141.